УДК 656.13

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ, ПОВЫШАЮЩИЕ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНО-ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Корчагин В. А. - заслуженный деятель науки и техники РФ, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Управление автотранспортом», тел.: (4742) 32-82-07, e-mail: lyapin@stu.lipetsk.ru; *Суворов В. А.* – канд. техн. наук, доцент кафедры «Управление автотранспортом», тел.: (4742) 32-80-86, e-mail: kaf-uat@stu.lipetsk.ru; *Чекрыжов Е. А.* – асп. кафедры «Управление автотранспортом», тел.: (4742) 48-00-73, e-mail: chekryzhov_evgeny@mail.ru (ЛГТУ)

Надежность цепей поставок играет ключевую роль в поддержании устойчивого функционирования транспорно-логистических систем. В связи с этим в статье предложено решение задачи синтеза эффективных транспортно-логистических систем. Разработана математическая модель, повышающая надёжность выполнения транспортных функций и операций в узлах интегрированной цепи поставок. Приведён пример применения данной модели для интегрированной цепи «поставщик – производитель – потребитель».

The reliability of logistics chains plays a key role in support of the sustainable development of transport-logistics system. The solution to the problem of synthesis of effective transport-logistics system is proposed in this paper. A mathematical model the use of which enhances the reliability of transport function realization and operation in junctions of integrated logistic chain is developed. The results of this model application to the integrated chain “supplier – producer – consumer” are given.

Ключевые слова: транспортно-логистическая система, надёжность, математическая модель, узел, резервирование.

В сложной транспортно-логистической системе «поставщик - производитель – потребитель» отмечается низкий уровень взаимодействия и информационной связи между участниками перевозочного процесса, значительная разобщённость интересов сторон, простои грузовых единиц (контейнеров, вагонов, автомобилей). Решение этих задач возможно на основе логистической интеграции участников системы. Интеграция возможна на основе ориентированной на достижение единой цели координации всех видов деятельности и всех процессов, разбросанных во времени и пространстве вдоль единой цепочки спроса (поставок).

Задачей логистики является продвижение материального потока через препятствия с наименьшими затратами времени и общими расходами при доставке груза «от двери до двери». Большинство логистических операторов уделяют основное внимание стоимости доставки и не учитывают требований к надежности доставки грузов, которые предъявляет заказчик. Возможность быстро и гибко реагировать на любые внешние и внутренние изменения условий поставки является важнейшим свойством транспортно-логистической системы (ТЛС).

Надёжность ТЛС - это способность оператора гарантировать минимальное количество отказов в интегрированной логистической цепи. Это показатель качества её работы, связанный с вероятностью безотказного функционирования в заданных условиях с учётом влияния внешней среды. Поэтому необходим системный подход к оценке и повышению надёжности интегрированных цепей поставок: установление вероятностных закономерностей функционирования цепи, разработка математической модели оптимизации надёжности всей интегрированной цепи «поставщик – производитель – потребитель».

Первая часть задачи решена с помощью конечных цепей Маркова, позволяющих определить вероятность нахождения материального потока в процессе движения в заданных состояниях [1]. Вторая часть проблемы требует самостоятельного исследования и решения.

Представим интегрированную цепь поставок как систему, состоящую из S узлов, $i=1,...,S$, в которой каждый узел состоит из m элементов, $j=1,...,m$. Узел – это функционально обособленное звено логистической цепи, выполняющее определённый вид логистической активности [2]. Вероятность безотказной работы $j-$го элемента в $i-$м узле равна ω_{ji}. Тогда вероятность отказа $j-$го элемента в $i-$м узле $1-\omega_{ji}=\varepsilon_{ji}$. Вероятность отказа $i-$го узла $\prod_{j=1}^{m}\varepsilon_{ji}$, а вероятность его безотказной работы $1-\prod_{j=1}^{m}\varepsilon_{ji}$. Каждый узел имеет вес (важность) A_i в цепи поставок, определяемый долей времени проводимого в узле материальным потоком по отношению к общему времени цикла интегрированной цепи поставок.

Обозначим неизвестное количество резервных элементов, выделяемых для $j-$го элемента $i-$го узла x_{ji}, а его стоимость a_{ji}. Величина бюджета задана и равна B.

Таким образом, необходимо найти матрицу $X_o=\left\|x_{ji}^o\right\|$, обеспечивающую максимум функции

$$y(x)=\sum_{i=1}^{S}A_i(1-\prod_{j=1}^{m}\varepsilon_{ji}^{x_{ji}}) \qquad (1)$$

при линейном ограничении на переменные

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{S}a_{ji}x_{ji}\le B \qquad (2)$$

и дополнительных условиях:

$$\left.\begin{array}{r} x_{ji}\in\{0,1,...\},\\ 0\le(\varepsilon_{ji}=1-\omega_{ji})\le 1,\\ A_i\ge 0;\ a_{ji}>0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} i=1,...,S\ \ (i\in I_S)\\ j=1,...,m. \end{array} \qquad (3)$$

Обозначим полные затраты на элементы $j-$го типа

$$a_j=\sum_{i=1}^{S}a_{ji}x_{ji},\ \ j=1,...,m. \qquad (4)$$

Общее количество задействованных элементов $j-$го типа

$$x_j=\sum_{i=1}^{S}x_{ji},\ \ j=1,...,m. \qquad (5)$$

Состав резервных элементов может быть представлен в виде вектора $\overrightarrow{X}=\{x_j\}_m$.

Количество денежных средств, выделяемых для резервирования $i-$го узла

$$B_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}x_{ji}\quad (B=\sum_{i=1}^{S}B_i),\ \ i=1,...,S. \qquad (6)$$

Т.к. целевая функция (1) не убывает, а ограничение (2) линейно, то решение будет выполняться при знаке «равно» в ограничении (2) с точностью, определяемой дискретностью величины a_{ji}.

Вычислим матрицу $\|\nu_{ji}\|$, элементы которой определяются по формуле

$$\nu_{ji}=(A_i\omega_{ji})/a_{ji},\ \ i=1,...,S;\ j=1,...,m. \qquad (7)$$

Элемент ν_{ji} по своему смыслу означает прирост целевой функции на единицу затрат.

Условие целесообразности замены $k-$го элемента $j-$м при резервировании

$$(\nu_{ji}=(A_i\omega_{ji})/a_{ji})\ge(\nu_{ki}=(A_i(1-\varepsilon_{ki}^{x_{ki}})/a_{ji})). \qquad (8)$$

Тогда можно определить зависимость изменения оптимального состава элементов и максимального уровня достигаемого эффекта от величины бюджета B_i, выделяемого для резервирования $i-$го узла $F_i(B_i)$. Если такие зависимости для каждого узла построены, то исходная задача может быть преобразована в задачу максимизации функции

$$F(\overrightarrow{B}) = \sum_{i=1}^{S} F_i(B_i), \tag{9}$$

путём определения вектора $\overline{B} = \{B_i\}_S$, компоненты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{S} B_i \le B,\ B_i \ge 0,\ i = 1,...,S. \tag{10}$$

Таким образом, решение исходной задачи расчленяется на два этапа.

Первый этап состоит из S циклов, в каждом из которых решается одна и та же задача построения функции $F_i(B_i)$, $i = 1,...,S$.

Второй этап – решение задачи (5) при ограничении (6) методом последовательных приращений, который является модификацией градиентных методов оптимизации нелинейных функций [3]. В основе метода лежит эквивалентная замена оптимизируемой функции

$$F(\overrightarrow{B}) \square (F(\overrightarrow{B}) / B = V(\overrightarrow{B})). \tag{11}$$

Физический смысл величины V - степень эффективности расходования ограниченного ресурса B.

Тогда

$$F(\overrightarrow{B}) = V(\overrightarrow{B})B = \sum_{i=1}^{S} V_i(B_i) \cdot B_i, \tag{12}$$

где $V_i(B_i)$ - средняя скорость прироста i - ой компоненты целевой функции в области изменения аргумента от 0 до B_i

$$V_i(B_i) = F_i(\overrightarrow{B_i}) / B_i,\ i = 1,2,...,S. \tag{13}$$

Ресурс последовательно распределяется порциями ΔB_i^t на t - м шаге процесса. Общий ресурс B_i, выделенный на i - ю компоненту – сумма всех этих приращений за все d шагов процесса

$$B_i = B_i^{(d)} = \sum_{i=1}^{d} \Delta B_i^{(t)} \text{ и } B = B^{(d)} = \sum_{i=1}^{S}\sum_{t=1}^{d} \Delta B_i^{(t)} \le B. \tag{14}$$

Если на t - м шаге процесса аргумент i - й функции получает приращение $\Delta B_i^{(t)}$, то получает приращение $\Delta F_i(B_i)$ и целевая функция (за счёт изменения i - й компоненты):

$$\Delta F(\overrightarrow{B^{(t)}}) = \Delta F_i(B_i^{(t)}) = F_i(B_i^{(t-1)} + \Delta B_i^t) - F_i(B_i^{(t-1)}) = \Delta F_i. \tag{15}$$

Средняя эффективность использования каждой из ΔB_i единиц ресурса на t - м шаге процесса

$$V_i^{(t)} = \Delta F_i(B_i^{(t)}) / \Delta B_i^{(t)},\ i = 1,2,...,S. \tag{16}$$

Следовательно

$$F_d = F(\overrightarrow{B^{(d)}}) = \sum_{i=1}^{S}\sum_{t=1}^{d} V_i^{(t)} \cdot \Delta B_i^{(t)}. \tag{17}$$

Алгоритм будет состоять в последовательном распределении общего ресурса порциями $\Delta B_i^{(t)}$, величина которых и номер i_t компоненты вектора $\overrightarrow{B^{(t)}}$ определяются в соответствии с максимумом эффективности использования каждой единицы ресурса на каждом шаге процесса.

Аппроксимируем кривые $F_i(B_i)$ выпуклой кверху оболочкой («нить, обтягивающая сверху» кривую $F_i(B_i)$ и закреплённая одним концом в начале координат). Общие точки функции $F_i(B_i)$ и её оболочки называются сопряжёнными точками, а общие участки функции и оболочки – сопряжёнными участками.

Идея решения состоит в оптимизации по выпуклым оболочкам с шагами по сопряжённым точкам.

Оптимальная величина шага $\Delta B_i^{(m)}$, где m - номер сопряжённой точки определяется из условия

$$(V_i^{(m)} = \Delta F_i^{(m)} / \Delta B_i^{(m)}) = \max_{\Delta B_i}(V_i = \Delta F_i / \Delta B_i),\ 0 \le \Delta B_i \le B;\ i = 1, \dots, S. \quad (18)$$

Номер i_t компоненты текущего вектора $\overrightarrow{B^{(t)}}$, при котором на t - м шаге процесса достигается наибольшее значение величины $V_i^{(m)}$, определяется в соответствии с условием

$$V_{i_t}^{(m)} = \max_{1 \le i \le S} V_i^{(t)}. \quad (19)$$

Тогда с учётом (11) и (12) можно записать

$$F(\overrightarrow{B_0}) = \max_{\vec{B}} F(\vec{B}) = \max_{\Delta B_i} \sum_{i=1}^{S} \sum_{t=1}^{d} V_i^{(t)} \cdot \Delta B_i^{(t)} = \sum_i \sum_t V_{i_t}^{(m)} \cdot \Delta B_i^{(m)}. \quad (20)$$

Алгоритм решения

Шаг 1. Вычислить элементы матрицы $\|v_{ji}\|$ по формуле (7).

Шаг 2. Последовательно увеличивая бюджет $B_i \le B$ и применяя условие (8) построить зависимости $F_i(B_i)$ для $i = 1, \dots, S$.

Шаг 3. Определить элементы совмещённой матрицы

$$\left\| V_{ji}^{(m)} / \Delta B_{ji}^{(m)} \right\|,\ i = 1, \dots, S;\quad j = 1, \dots, m. \quad (21)$$

Эта матрица объединяет в себе две матрицы $\|V_{ji}^{(m)}\|$ и $\Delta B_{ji}^{(m)}$.

Шаг 4. Записать начальные значения текущих величин

$$B_i^0 = 0,\ i = 1, \dots, S;\ F_0 = 0.$$

Шаг 5. На t -м шаге процесса определить номер i_t по условию

$$V_{i_t}^{(m)} = \max_{1 \le i \le S} V_i^{(m)}. \quad (22)$$

Шаг 6. Вычислить текущее значение неизрасходованного ресурса по формуле

$$B^{(t)} = B^{(t-1)} - \Delta B_{i_t}^{(t)}. \quad (23)$$

Шаг 7. Проверить условие

$$B^t \le 0 ?$$

да – перейти к шагу 11; нет – перейти к шагу 8 и $t := t + 1$.

Шаг 8. Вычислить текущие значения компонент вектора $\overline{B^{(t)}}$

$$B_i^{(t)} = \begin{cases} B_i^{(t-1)}, \text{если } i \neq i_t, \\ B_i^{(t-1)} + \Delta B_i^{(m)}, \text{ если } i = i_t. \end{cases} \quad (24)$$

Шаг 9. Вычислить текущее значение целевой функции по формуле

$$F_t = F_{t-1} + \Delta F_{i_t}^{(t)}. \quad (25)$$

где $\Delta F_{i_t}^{(t)}$ - приращение целевой функции на t - м шаге.

Шаг 10. Вычеркнуть элемент матрицы $V_{i_t}^{(m)}$. Перейти к шагу 5.

Шаг 11. Записать решение

$$\overrightarrow{B_0} = \left\{x_i^d\right\}_S \; ; \; F(\overrightarrow{B_0}) = F_d \, .$$

На рис.1 приведена блок-схема алгоритма решения задачи.

Алгоритм позволяет решить и обратную задачу – определить необходимое количество ресурса для обеспечения значения целевой функции не менее заданной величины $F_{доп}$. Изменение основного алгоритма состоит в том, что после каждого цикла необходимо проверять условие $F(\overrightarrow{B^{(t)}}) \geq F_{доп}$ и при его выполнении прекращать процесс.

В качестве примера рассмотрим резервирование элементов в цепи «поставщик – производитель – потребитель». Узлами считаются склады участников цепи поставок (поставщика сырья, готовой продукции производителя, потребителя продукции). В табл.1 представлен набор элементов для резервирования, их стоимость a_{ji}, вероятности отказов ε_{ji} и безотказной работы w_{ji} элементов (взяты из статистических наблюдений).

Таблица 1

Набор элементов

Узел	Элемент	Вер-ть безотказной работы элемента W_{ji}	Вер-ть отказа элемента E_{ji}	Стоимость элемента, д.е a_{ji}
Склад поставщика сырья	Экскаватор	0,95	0,05	20
	Погрузчик	0,97	0,03	9
	Погрузчик	0,94	0,06	5
	Автомобиль	0,96	0,04	15
Склад готовой продукции производителя	Погрузчик	0,92	0,08	4
	Погрузчик	0,96	0,04	6
	Бригада комплектовщиков	0,9	0,1	7
	Штабелёр	0,94	0,06	2
Склад готовой продукции потребителя	Работники склада	0,97	0,03	7
	Автомобиль	0,94	0,06	13
	Погрузчик	0,91	0,09	8
	Погрузчик	0,95	0,05	5

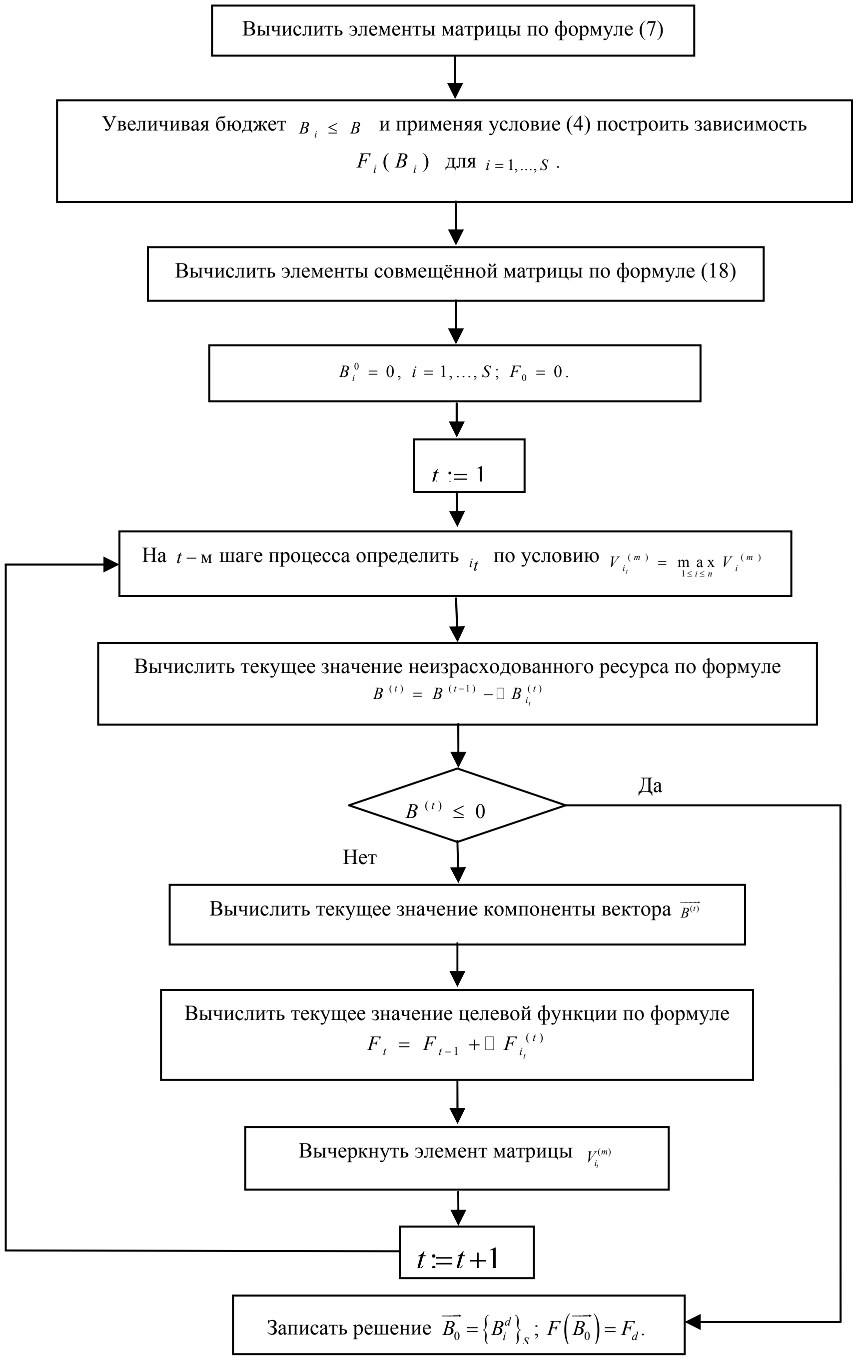

Рис. 1. Блок-схема решения задачи резервирования системы запасными элементами

$B^{(t)} \leq 0$Для резервирования элементов в узлах цепи был выделен бюджет размером 100 д.е. В качестве 1д.е. принимаем 150 тыс. руб.

Вектор A_i показывает важность узла (склада) в цепи поставок. $A_i = \{35;40;25\}$.

Вычислим матрицу $\|v_{ji}\|$, элементы которой определяются по формуле (3)

$$v_{ji} = \begin{Vmatrix} 0,95 & 0,92 & 0,97 \\ 0,97 & 0,96 & 0,94 \\ 0,94 & 0,9 & 0,91 \\ 0,96 & 0,94 & 0,95 \end{Vmatrix}$$

Построим зависимости $F_i(B_i)$ для узлов цепи. Для этого определим количество резервных элементов на каждом шаге размера бюджета, выделяемого на i -й узел по формуле

$$x_{ji} = B_i / a_{ji} \tag{26}$$

где B_i - бюджет, выделенный для резервирования на i -го узла.

Последовательно увеличивая бюджет $B_i \leq B$ и применяя условие (4) рассчитываем значения функции $F_i(B_i)$ для $i = 1, \ldots, S$.

В табл. 2 приведён пример расчёта функций $F_i(B_i)$ для узлов интегрированной цепи.

Таблица 1

Расчёт значений функции $F_i(B_i)$

k	Поставщик $i = 1$			Производитель $i = 2$			Потребитель $i = 3$		
	B_1	$F_1(B_1)$	(j)	B_2	$F_2(B_2)$	(j)	B_3	$F_3(B_3)$	(j)
1	5	32,9	3	2	37,6	4	5	23,75	4
2	10	33,95	2	4	39,856	4	8	23,75	4
3	15	66,85	2,3	8	76	2,4	13	48	1,4
4	20	66,5	4,3	12	75,856	3,4	15	46,5	3,4
5	30	67,2	1,2	14	77,58	1,4	22	47,25	2,4
6	50	68,863	1,2	16	79,792	2,4	30	48,732	3,4
7	80	67,9	2,3	20	114	3,1,4	50	49,245	2,1

На рис. 2 приведены графики зависимостей $F_i(B_i)$ для узлов интегрированной цепи.

С помощью метода последовательных приращений оптимизируем распределение ресурса по узлам интегрированной цепи. Для этого вычислим элементы совмещённой матрицы (16), где $\Delta B_{ji}^{(m)}$ - шаг приращения бюджета.

$$\frac{V_{ji}^{(m)}}{\Delta B_{ji}^{(m)}} = \left\| \begin{array}{c:c:c} \frac{6,58}{5} & \frac{18,8}{2} & \frac{4,85}{13} \\ \hdashline \frac{6,58}{10} & \frac{9,036}{6} & \frac{0,185}{17} \\ \hdashline \frac{0,083}{35} & \frac{8,552}{12} & \frac{0,026}{20} \end{array} \right\|$$

После выполнения шагов алгоритма (с 4 по 10) получаем матрицу $\left\| x_{ji} \right\|$, которая показывает порядок резервирования элементов в узлах цепи, вектор $\overrightarrow{B_0} = \left\{ B_i^d \right\}_S$, показывающий распределение бюджета по узлам, а также значение целевой функции $F(\overrightarrow{B_0}) = F_d$.

$$\overrightarrow{B_0} = \{50; 20; 30\} \qquad F(\overrightarrow{B_0}) = 492,945.$$

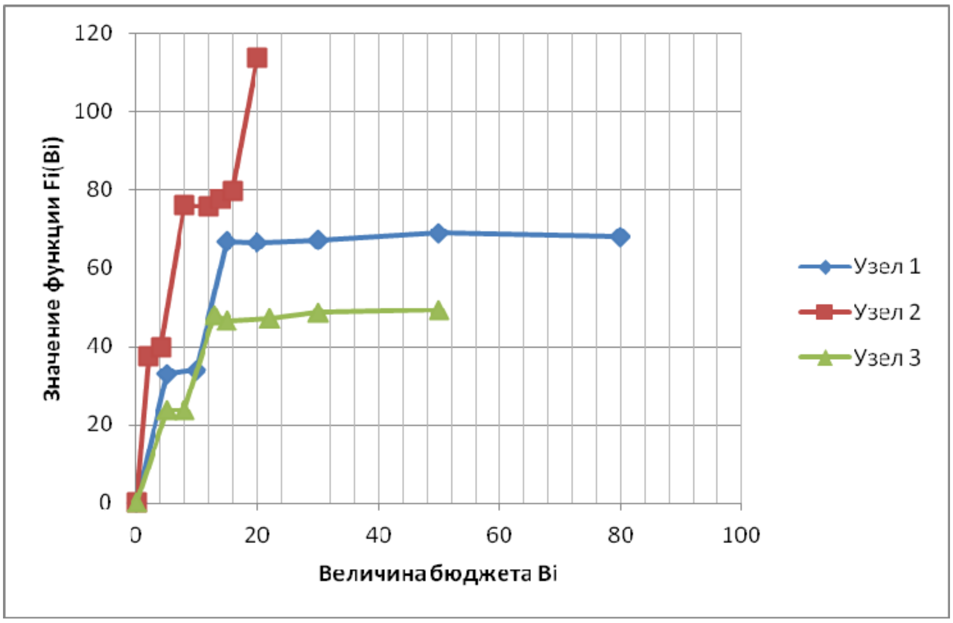

Рис. 2. Графики зависимостей $F_i(B_i)$ для узлов интегрированной цепи

Применение разработанной математической модели на практике позволит повысить надёжность выполнения транспортных функций и операций в узлах интегрированной цепи поставок, что окажет непосредственное влияние на надёжность всей цепи, а также расширит аналитический инструментарий оценки надёжности интегрированных цепей. Разработанный теоретический базис позволяет принимать научно-обоснованные инженерные решения и осуществлять поиск и выбор наиболее экономически рациональных путей повышения эффективности функционирования ТЛС. Предлагаемый в данной статье подход является развитием идей и методов, разработанных для создания транспортно распределительных систем [4, 5].

Библиографические ссылки

1. *Корчагин В.А., Суворов В.А., Чекрыжов Е.А.* Моделирование интегрированных цепей поставок с помощью поглощающих цепей Маркова. «Вестник МАДИ». Выпуск 3 (30), с. 49-53.
2. *Корпоративная* логистика. 300 ответов на вопросы профессионалов / Под общей и науч. редакцией проф. В.И. Сергеева. – М.: ИНФРА-М, 2005. – 976 с.
3. *Фиакко А., Мак-Кормик*. Нелинейное программирование (методы последовательной безусловной минимизации). – М.: «Мир», 1972. – 240 с.
4. *Пугачёв И.Н.* Развитие городских транспортно-распределительных систем. // Транспорт Урала. - 2010. - № 1 (24).
5. *Пугачёв И.Н., Бурков С.М.* Практическое применение модели кластерных сетевых структур в решении задач повышения эффективности функционирования транспортно-распределительных систем городов. // Вестник Тихоокеанского государственного университета. - 2010. - № 2 (17).