



УДК 534.014

© *И. П. Попов, Е. О. Шамарин, 2013*

СВОБОДНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СО СМЕЩЕННЫМИ ФАЗАМИ

Попов И. П. – ст. преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты», e-mail: popov_ip@kurganobl.ru (Курганский государственный университет); *Шамарин Е. О.* – д.-р. физ.-мат. наук, науч. консульт. (ООО «Центр высоких технологий»)

Рассматриваются механические колебательные системы, состоящие только из инертных (mm -, mmm -, m^n -системы) или только упругих элементов (kk -, kkk -, k^n -системы). Показана возможность возникновения в них свободных гармонических колебаний. В mm -, mmm -, m^n -системах происходит взаимный обмен кинетической энергией между инертными элементами, в (kk -, kkk -, k^n -системах) – взаимный обмен потенциальной энергией между упругими элементами. Колебания в таких системах обусловлены смещением фаз колебаний элементов.

We consider the mechanical vibration systems, consisting only of inert (mm -, mmm -, m^n -systems) or only elastic (kk -, kkk -, k^n -systems) components. The possible origin of free harmonic vibrations in them is shown. In the mm -, mmm -, m^n -systems the mutual exchange of the kinetic energy between the inert elements occurs. In kk -, kkk -, k^n -systems the mutual exchange of the potential energy between the elastic elements takes place. Vibrations in systems of this kind are due to a phase displacement in elements under vibration.

Ключевые слова: колебательные, инертные, упругие, гармонические, частота.

Введение

Свободные гармонические колебания основаны на обмене энергией между элементами колебательной системы.

В механическом линейном гармоническом осцилляторе происходит обмен энергией между разнородными элементами – грузом массой m (инертным элементом) и пружиной с коэффициентом упругости k (упругим элементом). При механических колебаниях кинетическая энергия груза преобразуется в потенциальную энергию пружины и наоборот [1]. Существуют электромеханические колебательные системы, в которых свободные гармонические колебания осуществляются за счет взаимного преобразования потенциальной энергии пружины в энергию электрического поля конденсатора или

кинетической энергии груза в энергию магнитного поля катушки индуктивности [2–4]. В некоторых колебательных системах происходит преобразование кинетической энергии в кинетическую [5] или потенциальную энергию в потенциальную [6]. Таким образом, колебания сопровождаются самыми разнообразными вариантами преобразования энергии.

Целью настоящей работы является установление условий возникновения свободных гармонических колебаний, осуществляемых за счет преобразования кинетической энергии в кинетическую или потенциальную энергию в потенциальную. Реализующие такие колебания системы должны состоять либо только из инертных (mm -, mmm -, m^n -системы), либо только из упругих элементов (kk -, kkk -, k^n -системы). Механизм обмена энергией между однородными элементами в таких системах позволит, в частности, расширить возможности нейтрализации реакции этих элементов на внешние периодические воздействия.

Синтез mm -системы

Синтез системы осуществляется на основе двух исходных условий.

Первое исходное условие. Система содержит два инертных элемента – два груза массой m каждый. Элементы совершают гармонические колебания

$$x_1 = A \sin(\zeta + \zeta_1), \quad x_2 = A \sin(\zeta + \zeta_2),$$

где x_1, x_2 – текущие координаты грузов, A – амплитуда колебаний, ζ – фаза, ζ_1, ζ_2 – начальные фазы.

Второе исходное условие. Энергия системы при колебаниях не меняется
 $W_1 + W_2 = \text{const}$.

Одновременный учет обоих исходных условий дает представление о характере связи между инертными элементами. Действительно,

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 = \text{const}, \quad \cos^2(\zeta + \zeta_1) + \cos^2(\zeta + \zeta_2) = \text{const}_2$$

Последнее справедливо при условиях:

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \pm \pi/2$$

Полученное соотношение позволяет определить связующее звено между инертными элементами. Таким звеном является устройство, изображенное на рис. 1.

Анализ mm -системы

Внешние усилия к грузам не приложены. Масса промежуточного стержня и трение не учитываются. Координаты грузов, соответственно,

$$x_1 = l \cos \varphi, \quad x_2 = l \cos(\pi/2 - \varphi) \quad (1)$$

Запись третьего закона Ньютона для грузов с учётом (1)

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} \frac{1}{\cos \varphi} = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \frac{1}{\sin \varphi},$$

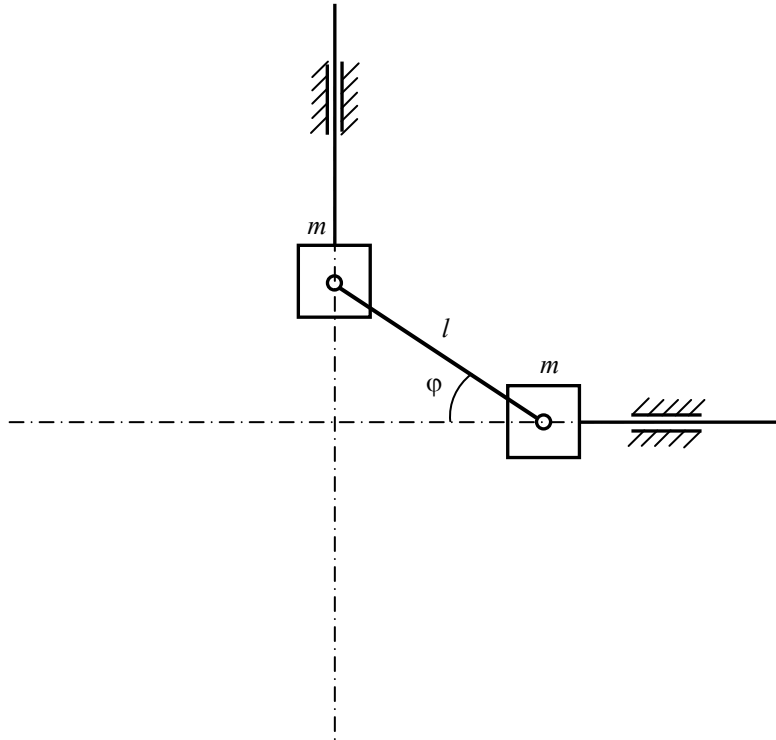


Рис. 1. *mm*-система

$$-\cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \sin^2 \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \cos^2 \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$d^2\varphi/dt^2 = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$d\varphi/dt = C_1, \quad \varphi = C_1 t + C_2. \quad (2)$$

Пусть начальные условия

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0 \quad (3)$$

Тогда

$$C_2 = \varphi_0, \quad C_1 = \omega_0. \quad (4)$$

При этом (1) принимает вид:

$$x_1 = l \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad x_2 = l \cos(\pi/2 - \omega_0 t - \varphi_0) \quad (5)$$

Пусть

$$1) x_1(0) = x_{10}, \quad \cos \varphi_0 = x_{10}/l, \quad \varphi_0 = \arccos(x_{10}/l) (= \arcsin(x_{20}/l))$$



$$2) \frac{dx_2}{dt}(0) = v_{20}, \quad l\omega_0 \cos(\omega_0 0 + \varphi_0) = v_{20}, \quad \omega_0 = v_{20}/x_{10} (= -v_{10}/x_{20})$$

$$x_1 = l \cos[(v_{20}/x_{10})t + \arccos(x_{10}/l)], \quad x_2 = l \cos[\pi/2 - (-v_{10}/x_{20})t - \arcsin(x_{20}/l)] \quad (6)$$

$$v_1 = l(v_{10}/x_{20}) \sin[(-v_{10}/x_{20})t + \arcsin(x_{10}/l)],$$

$$v_2 = l(v_{20}/x_{10}) \cos[(v_{20}/x_{10})t + \arccos(x_{20}/l)]$$

Таким образом, грузы массой m совершают свободные гармонические колебания (внешние усилия к грузам не приложены).

В рассмотренной колебательной системе происходит взаимный обмен кинетической энергией между инертными элементами. При $\varphi = 0$ кинетическая энергия первого груза равна нулю, а второго – максимальна. После этого первый груз начинает ускоряться за счет энергии второго груза, который приобретает отрицательное ускорение.

Синтез mmm -системы

Пусть три координатные оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 лежат в одной плоскости, последовательно повернуты относительно друг друга на $\pi/3$ и пересекаются в одной точке. Точка пересечения O является началом произвольно направленного вектора \mathbf{R} .

Теорема 1. Координаты x_1, x_2, x_3 проекций конца вектора \mathbf{R} на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 являются вершинами равностороннего треугольника, размер которого не зависит от направления \mathbf{R} .

Доказательство. Координаты проекций

$$x_1 = R \cos \varphi, \quad x_2 = R \cos(\pi/3 - \varphi), \quad x_3 = R \cos(2\pi/3 - \varphi) \quad (7)$$

Здесь φ – угол между \mathbf{R} и Ox_1 . По теореме косинусов

$$(x_1 x_2)^2 = R^2 [\cos^2 \varphi + \cos^2(\pi/3 - \varphi) - 2 \cos \varphi \cos(\pi/3 - \varphi) \cos(\pi/3)] =$$

$$R^2 \left[\cos^2 \varphi + \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - 2 \cos \varphi \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \frac{1}{2} \right] =$$

$$R^2 \left[\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2$$

$$(x_1 x_3)^2 = R^2 [\cos^2 \varphi + \cos^2(2\pi/3 - \varphi) - 2 \cos \varphi \cos(2\pi/3 - \varphi) \cos(2\pi/3)] =$$

$$R^2 \left[\cos^2 \varphi + \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - 2 \cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$R^2 \left[\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2$$



$$\begin{aligned}
 (x_2x_3)^2 &= R^2[\cos^2(\pi/3 - \varphi) + \cos^2(2\pi/3 - \varphi) - 2\cos(\pi/3 - \varphi)\cos(2\pi/3 - \varphi)\cos(\pi/3)] = \\
 &= R^2 \left[\left(\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \right)^2 - \right. \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \right) \left(-\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \right) \frac{1}{2} \left. \right] = \\
 &= R^2 \left(\frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi + \right. \\
 &= \left. \frac{3}{4}\sin^2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi - \frac{3}{4}\sin^2\varphi \right) = \frac{3}{4}R^2
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Центр треугольника $x_1x_2x_3$ совпадает с серединой вектора \mathbf{R} .

Доказательство. Пусть r – середина вектора \mathbf{R} . По теореме косинусов

$$(x_1r)^2 = R^2[\cos^2\varphi + 1/4 - 2\cos\varphi(1/2)\cos\varphi] = R^2/4$$

$$(x_2r)^2 = R^2[\cos^2(\pi/3 - \varphi) + 1/4 - 2\cos(\pi/3 - \varphi)(1/2)\cos(\pi/3 - \varphi)] = R^2/4$$

$$(x_3r)^2 = R^2[\cos^2(2\pi/3 - \varphi) + 1/4 - 2\cos(2\pi/3 - \varphi)(1/2)\cos(2\pi/3 - \varphi)] = R^2/4$$

Точка r равноотстоит от точек x_1 и x_2 , следовательно, она расположена на прямой, перпендикулярной отрезку x_1x_2 и проходящей через его середину. Это же справедливо в отношении отрезка x_1x_3 . Таким образом, точка r принадлежит двум высотам треугольник $x_1x_2x_3$, следовательно, она лежит на их пересечении, которое для равностороннего треугольника является центром. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 позволяют определить конфигурацию mmm -системы, упрощённая схема которой показана на рис. 2.

Анализ mmm -системы

Внешние усилия к грузам не приложены. Скорости грузов с учетом (7)

$$dx_1/dt = -R\sin\varphi d\varphi/dt, \quad dx_2/dt = R\sin(\pi/3 - \varphi)d\varphi/dt, \quad dx_3/dt = R\sin(2\pi/3 - \varphi)d\varphi/dt$$

Условием возникновения свободных гармонических колебаний является постоянство полной, в рассматриваемом случае кинетической энергии системы

$$\begin{aligned}
 T &= 0,5mR^2[\sin^2\varphi + \sin^2(\pi/3 - \varphi) + \sin^2(2\pi/3 - \varphi)](d\varphi/dt)^2 = \\
 &= 0,75mR^2(d\varphi/dt)^2 = \text{const} \\
 d\varphi/dt &= \text{const}
 \end{aligned}$$

С учетом (2)–(4) (7) принимает вид:

$$x_1 = R\cos(\omega_0t + \varphi_0), \quad x_2 = R\cos(\pi/3 - \omega_0t - \varphi_0), \quad x_3 = R\cos(2\pi/3 - \omega_0t - \varphi_0) \quad (8)$$

Пусть $x_1(0) = x_{10}$, $(dx_1/dt)(0) = v_{10}$. Тогда

$$\cos\varphi_0 = x_{10}/R, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{x_{10}}{R} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}} \quad (9)$$

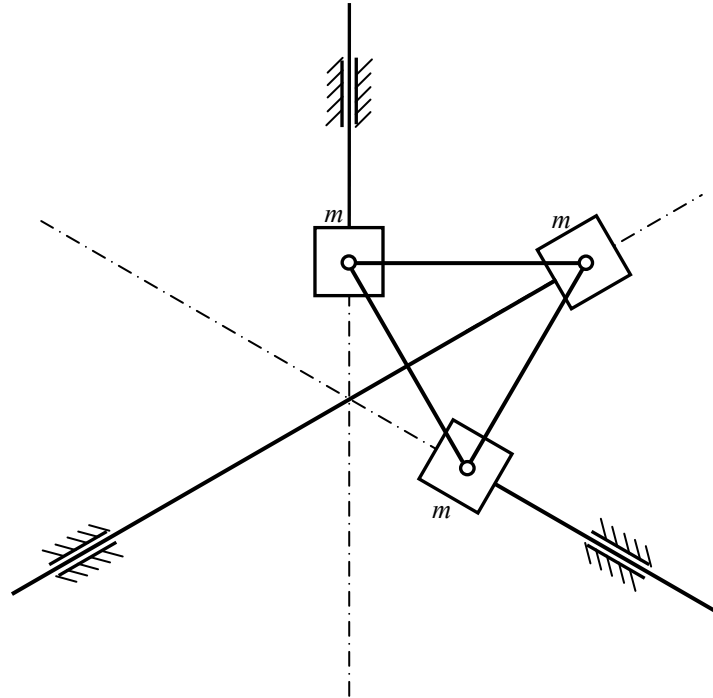


Рис. 2. mmm-система

$$-R\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = v_{10}, \quad \omega_0 = -\frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}} \quad (10)$$

Таким образом, все три груза совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою кинетической энергией.

Упругая *kk*-система

Система отличается от *mm*-системы тем, что вместо массивных грузов к вертикальному и горизонтальному стержням прикреплены пружины с коэффициентом упругости k , а середина промежуточного стержня связана с началом координат посредством кривошипа. При $\varphi = 0$ первая пружина максимально сжата, вторая – не деформирована. При $\varphi = \pi/2$ первая пружина не деформирована, вторая – максимально сжата. При $\varphi = \pi$ первая пружина максимально растянута, вторая – не деформирована. Запись третьего закона Ньютона для пружин в соответствии с законом Гука

$$kx_1 \frac{1}{\cos \varphi} = kx_2 \frac{1}{\sin \varphi}$$



С учетом (1) это выражение является тождеством. Другими словами, суммарная сила, приложенная к кривошипу, равна нулю при любой скорости его вращения. При начальных условиях (3) и в соответствии с аналогом первого закона Ньютона для вращательного движения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0, \quad \varphi = \int \omega_0 dt = \omega_0 t + C = \omega_0 t + \varphi_0 \quad (11)$$

При этом (1) приводится к (5) и (6).

Таким образом, пружины с коэффициентом упругости k совершают свободные гармонические колебания.

В рассмотренной колебательной системе происходит взаимный обмен потенциальной энергией между упругими элементами. При $\varphi = 0$ потенциальная энергия первой пружины максимальна, а второй – равна нулю. После этого вторая пружина начинает сжиматься за счет энергии первой пружины, которая начинает разжиматься.

Упругая kkk -система

Система отличается от mmm -системы тем, что грузы заменены пружинами с коэффициентом упругости k . Кроме того, она оснащена кривошипом, связывающим точку пересечения координатных осей с центром треугольника $x_1 x_2 x_3$. При этом центр треугольника жестко связан с его сторонами. С учетом (7) потенциальная (она же полная) энергия системы

$$\Pi = 0,5kR^2[\cos^2\varphi + \cos^2(\pi/3 - \varphi) + \cos^2(2\pi/3 - \varphi)] = 0,75kR^2 = \text{const}$$

Суммарный момент $M = d\Pi/d\varphi = 0$ при любой скорости вращения кривошипа. При начальных условиях (3) и в соответствии с аналогом первого закона Ньютона для вращательного движения выполняется (11). При этом (7) приводится к (8)–(10).

Таким образом, все три пружины совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою потенциальной энергией.

Обобщение на n -мерный случай

Пусть n координатных осей Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n , лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке. Соседние оси ориентированы под углами π/n относительно друг друга. Точка пересечения O является началом произвольно направленного вектора \mathbf{R} .

Теорема 3. Координаты x_1, x_2, \dots, x_n проекций конца вектора \mathbf{R} на оси Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n являются вершинами правильного n -угольника, размер которого не зависит от направления \mathbf{R} , а центр совпадает с серединой \mathbf{R} .

Доказательство. Координаты проекций

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi, & x_2 &= R\cos(\pi/n - \varphi), & x_3 &= R\cos(2\pi/n - \varphi), \\ x_i &= R\cos[(i-1)\pi/n - \varphi], & x_n &= R\cos[(n-1)\pi/n - \varphi] \end{aligned} \quad (12)$$

По теореме косинусов

$$\begin{aligned} (x_i x_{i+1})^2 &= R^2 \{ \cos^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + \cos^2(i\pi/n - \varphi) - \\ &2\cos[(i-1)\pi/n - \varphi]\cos(i\pi/n - \varphi)\cos\pi/n \} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & R^2 \{ \cos^2(i\pi/n - \varphi - \pi/n) + (\cos i\pi/n \cos \varphi + \sin i\pi/n \sin \varphi)^2 - \\
 & 2[\cos \pi/n (\cos i\pi/n \cos \varphi + \sin i\pi/n \sin \varphi) + \sin \pi/n (\sin i\pi/n \cos \varphi - \\
 & \cos i\pi/n \sin \varphi)] (\cos i\pi/n \cos \varphi + \sin i\pi/n \sin \varphi) \cos \pi/n \} = \\
 & R^2 (\cos^2 \pi/n \cos^2 i\pi/n \cos^2 \varphi + \cos^2 \pi/n \sin^2 i\pi/n \sin^2 \varphi + \sin^2 \pi/n \sin^2 i\pi/n \cos^2 \varphi + \\
 & \sin^2 \pi/n \cos^2 i\pi/n \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \pi/n \cos i\pi/n \cos \varphi \sin i\pi/n \sin \varphi + \\
 & 2 \cos \pi/n \cos i\pi/n \cos^2 \varphi \sin \pi/n \sin i\pi/n - 2 \cos \pi/n \cos^2 i\pi/n \cos \varphi \sin \pi/n \sin \varphi + \\
 & 2 \cos \pi/n \sin^2 i\pi/n \sin \varphi \sin \pi/n \cos \varphi - 2 \cos \pi/n \sin i\pi/n \sin^2 \varphi \sin \pi/n \cos i\pi/n - \\
 & 2 \sin^2 \pi/n \sin i\pi/n \cos \varphi \cos i\pi/n \sin \varphi + \cos^2 i\pi/n \cos^2 \varphi + \sin^2 i\pi/n \sin^2 \varphi + \\
 & 2 \cos i\pi/n \cos \varphi \sin i\pi/n \sin \varphi - 2 \cos^2 \pi/n \cos^2 i\pi/n \cos^2 \varphi - \\
 & 2 \cos^2 \pi/n \sin i\pi/n \sin \varphi \cos i\pi/n \cos \varphi - 2 \sin \pi/n \sin i\pi/n \cos^2 \varphi \cos i\pi/n \cos \pi/n + \\
 & 2 \sin \pi/n \cos^2 i\pi/n \sin \varphi \cos \varphi \cos \pi/n - 2 \cos^2 \pi/n \cos i\pi/n \cos \varphi \sin i\pi/n \sin \varphi - \\
 & 2 \cos^2 \pi/n \sin^2 i\pi/n \sin^2 \varphi - 2 \sin \pi/n \sin^2 i\pi/n \cos \varphi \sin \varphi \cos \pi/n + \\
 & 2 \sin \pi/n \cos i\pi/n \sin^2 \varphi \sin i\pi/n \cos \pi/n) = \\
 & R^2 [\cos^2 \varphi (\sin^2 \pi/n \sin^2 i\pi/n - \cos^2 \pi/n \cos^2 i\pi/n + \cos^2 i\pi/n) + \\
 & \sin^2 \varphi (\sin^2 \pi/n \cos^2 i\pi/n - \cos^2 \pi/n \sin^2 i\pi/n + \sin^2 i\pi/n)] = \\
 & R^2 [\cos^2 \varphi (\sin^2 \pi/n \sin^2 i\pi/n + \cos^2 i\pi/n \sin^2 \pi/n) + \\
 & \sin^2 \varphi (\sin^2 \pi/n \cos^2 i\pi/n + \sin^2 i\pi/n \sin^2 \pi/n)] = \\
 & R^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \pi/n + \sin^2 \varphi \sin^2 \pi/n) = R^2 \sin^2 \pi/n
 \end{aligned}$$

Таким образом, все стороны многоугольника равны и не зависят от φ . Пусть r – середина вектора \mathbf{R} . По теореме косинусов

$$\begin{aligned}
 (x_r)^2 &= R^2 \{ \cos^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + 1/4 - \\
 & 2 \cos[(i-1)\pi/n - \varphi] (1/2) \cos[(i-1)\pi/n - \varphi] \} = R^2/4
 \end{aligned}$$

Все лучи, соединяющие r с вершинами многоугольника, равны между собой. Таким образом, многоугольник правильный. Теорема доказана.

Для инертной системы скорости грузов с учетом (12)

$$dx_1/dt = -R \sin \varphi d\varphi/dt, \quad dx_2/dt = R \sin(\pi/n - \varphi) d\varphi/dt,$$

$$dx_i/dt = R \sin[(i-1)\pi/n - \varphi] d\varphi/dt, \quad dx_n/dt = R \sin[(n-1)\pi/n - \varphi] d\varphi/dt$$

Условием возникновения свободных гармонических колебаний является постоянство полной, в рассматриваемом случае кинетической энергии системы

$$\begin{aligned}
 T &= 0,5mR^2 \{ \sin^2 \varphi + \sin^2(\pi/n - \varphi) + \dots + \sin^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + \dots \\
 & \dots + \sin^2[(n-1)\pi/n - \varphi] \} (d\varphi/dt)^2
 \end{aligned} \tag{13}$$

Теорема 4. При $n \geq 2$ справедлива формула:

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[\frac{(i-1)2\pi}{n} \pm 2\varphi \right] \right\} =$$



$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \sum_{i=1}^n \cos \frac{(i-1)2\pi}{n} \mp \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{i=1}^n \sin \frac{(i-1)2\pi}{n}$$

Пусть n единичных векторов образуют центрально симметричную звезду таким образом, чтобы один из векторов совпал с осью абсцисс. В силу симметрии сумма векторов равна нулю. Сумма проекций векторов на любую ось тоже равна нулю. Таким образом, две последние суммы равны нулю. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 5. При $n \geq 2$ справедлива формула:

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}$$

Кинетическая энергия инертной системы (13)

$$T = 0,25nmR^2(d\varphi/dt)^2 = \text{const}$$

$$d\varphi/dt = \text{const}$$

С учетом (2)–(4) (12) принимает вид:

$$x_1 = R\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad x_2 = R\cos(\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0), \quad x_3 = R\cos(2\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0),$$

$$x_i = R\cos[(i-1)\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0], \quad x_n = R\cos[(n-1)\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0] \quad (14)$$

При этом в соответствии с (9), (10)

$$\omega_0 = -\frac{v_{x10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{x_{10}}{R} \quad (15)$$

Таким образом, все n грузов совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою кинетической энергией.

Многоугольник $x_1 x_2 \dots x_n$ совершает двойное вращение – вокруг своего центра и вокруг точки O .

В отличие от инертной для упругой системы условием возникновения свободных гармонических колебаний являются постоянство потенциальной (полной) энергии и наличие кривошипа, связывающего точку пересечения координатных осей с центром многоугольника $x_1 x_2 \dots x_n$, который в свою очередь жестко связан с его сторонами.

$$\Pi = 0,5kR^2 \{ \cos^2 \varphi + \cos^2(\pi/n - \varphi) + \dots$$

$$\dots + \cos^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + \dots + \cos^2[(n-1)\pi/n - \varphi] \}$$

В соответствии с теоремой 5

$$\Pi = 0,25nkR^2 = \text{const}$$

Суммарный момент $M = d\Pi/d\varphi = 0$ при любой скорости вращения кривошипа. При начальных условиях (3), в соответствии с аналогом первого закона Ньютона для вращательного движения и (11) выполняются (14), (15).

Таким образом, все n пружин совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою потенциальной энергией.



Заключение

Установлены условия возникновения свободных гармонических колебаний в системах, состоящих только из инертных (mm -, mmm -, m^n -системах) или только упругих элементов (kk -, kkk -, k^n -системах), которая реализуется при обеспечении сдвига по фазе между колебаниями элементов.

В отличие от традиционных [1] или смешанных [2–4] колебательных систем при энергообмене между однородными элементами представленных систем вид энергии не меняется. В mm - и mmm -, m^n -системах происходит взаимный обмен кинетической энергией между инертными элементами. В kk - и kkk -, k^n -системах – потенциальной энергией между упругими элементами. При этом суммарная энергия системы при колебаниях не изменяется.

Другим отличием является то, что частоты свободных колебаний систем с однородными элементами не зависят от параметров элементов и определяются исключительно начальными условиями. Иначе говоря, рассмотренные системы могут совершать свободные гармонические колебания с любой изначально заданной частотой.

Колебательные свойства mm -, mmm -, m^n -систем могут учитываться при проектировании двигателей внутреннего сгорания, поршневых пневмосистем и прочих преобразователей возвратно-поступательного движения во вращательное в плане взаимной компенсации реактивного характера масс движущихся частей – поршней, штоков и пр.

Принцип обмена энергией между элементами в kk -, kkk -, k^n -системах может использоваться для самонейтрализации квазиупругих воздействий в пневмосистемах.

Библиографические ссылки

1. Комялова Е.В., Калита Е.Г. Моделирование колебательных процессов в технологической системе при токарной обработке полимерных материалов // Вестник Тихоокеанского государственного университета. - 2008. – №1(8). – С. 231–240.
2. Попов И.П. Свободные гармонические колебания в упруго-емкостной системе // Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. - 2011. – Вып. 4. №2(21). – С. 87–89.
3. Попов И.П. Установление частной функциональной зависимости между емкостью и массой // Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. - 2011. – Вып. 4. №2(21). – С. 85–87.
4. Попов И.П. Реактивные элементы электрических цепей с «неэлектрическими» параметрами // Вестник Самарского государственного технического университета. Технические науки. - 2010. – №4(27). – С. 166–173.
5. Тимошенко Д.В., Каминский А.В. Математическое моделирование переходных режимов четырехтактного дизеля с газотурбинным наддувом // Вестник Тихоокеанского государственного университета. - 2012. – №2(25). – С. 17–26.
6. Жуков Е.А., Каминский А.В., Корчевский В.В., Щербаков Ю.И., Жукова В.И. Измерение упругих и магнитоупругих констант магнитных кристаллов // Вестник Тихоокеанского государственного университета. - 2011. – №4(23). – С. 43–48.