



УДК 533.6.011:533.697

© В. Н. Емельянов, А. Г. Карпенко, 2013

## МЕТОД ПОСТАНОВКИ ДОЗВУКОВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

*Емельянов В. Н.* – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой «Плазмогазодинамика и тепло-техника» (Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова); *Карпенко А. Г.* – асп. кафедры «Гидроаэромеханика», e-mail: aspera.2003.ru@mail.ru (СПбГУ)

При расчете задач газовой динамики возникает проблема постановки граничных условий при дозвуковой скорости газа на границе. В работе предложен метод постановки дозвуковых граничных условий и решены тестовые задачи.

In prediction of challenges of gas dynamics there is a problem of statement of boundary conditions at the subsonic speed. In this paper the formulation method for subsonic boundary conditions is proposed and test problems are solved.

*Ключевые слова:* граничные условия, характеристики, газовая динамика, метод установления, квазиодномерное течение газа.

### Введение

Течения сжимаемого газа описываются системой уравнений газовой динамики, которые требуют корректной задания граничных и начальных условий. Поток на входе выходе расчетной области может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым. При сверхзвуковом втекании потока возмущения распространяются только вниз по потоку и поэтому все параметры в расчетную область привносятся из вне. В таком случае на входной границе необходимо задать плотность, скорость и давление. При дозвуковом втекании необходимо задавать только два каких либо параметра, а третий параметр следует определять используя данные во внутренней области. В работе предлагается метод определения параметров потока на входной и выходной дозвуковой границе. Производится расчет квазиодномерного течения в канале с переменной площадью.

### Основные уравнения и их дискретизация

Рассмотрим применение метода на примере описания течение вязкого газа в канале переменного сечения с прямолинейной осью, которое можно считать одномерным и поперечными скоростями частиц в сечении можно пренебречь. При таком подходе все параметры потока можно считать постоянными в каждом поперечном сечении и зависящими только от координаты



сечения вдоль оси канала. Площадь поперечного сечения такого канала будем обозначать  $S(x)$ . Система уравнений описывающая течение в таком канале похожа на систему одномерной газовой динамики и имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(SU) + \frac{\partial}{\partial x}(SF) = G, \quad (1)$$

где  $U, F, G$  - вектора переменных, потока и источника члена, которые записываются следующим образом:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ p \frac{dS}{dx} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $t$  - время;  $\rho$  - плотность;  $u$  - скорость газа;  $p$  - давление;  $E$  - полная энергия единицы массы, состоящая из суммы внутренней и кинетической энергии  $E = e + \frac{1}{2}u^2$ ;  $\gamma$  - отношение удельных теплоемкостей. Систему

необходимо дополнить уравнением состояния  $p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho u^2)$  Такое

течения газа и систему уравнений его описывающую принято называть квазиодномерными. Можно заметить, что эта система отличается от системы уравнений одномерной газовой динамики наличием источника члена в уравнении импульсов. Обусловлено это тем, что со стороны стенок на газ действует сила давления направленная по нормали. Эта сила имеет не нулевую составляющую при  $\frac{dS}{dx} \neq 0$ .

Часто бывает интересно стационарное решение задачи течения в канале. Решение такой задачи может быть получено методом установления. Суть метода состоит в том, что решение стационарной задачи отыскивается как предел к которому стремится решение нестационарных уравнений при  $t \rightarrow \infty$ . Для дискретизации системы уравнений (1) можно использовать метод контрольного объема, проинтегрировав систему по  $\Delta x_i$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial(SU)}{\partial t} dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial(SF)}{\partial x} dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} G dx.$$

В полудискретном виде систему уравнений можно записать следующим образом:

$$\Delta x_i S_i \frac{dU_i}{dt} + (F_{i+1/2} S_{i+1/2} - F_{i-1/2} S_{i-1/2}) = K_i,$$



где  $S_i = \frac{S_{i-1/2} + S_{i+1/2}}{2}$  - площадь сечения в центре ячейки при  $x_i$ ,  $\Delta x_i$  - шаг по координате  $x$  в ячейке  $i$ . Для расчета интеграла от источника члена можно использовать схему первого порядка и предположение о том, что давление постоянно внутри ячейки. Тогда выражение для источника члена примет вид

$$K_i = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} G dx = \begin{pmatrix} 0 \\ p_i (S_{i+1/2} - S_{i-1/2}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После преобразований система уравнений запишется в привычном виде:

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{1}{\Delta x_i S_i} (K_i - F_{i+1/2} S_{i+1/2} + F_{i-1/2} S_{i-1/2}). \quad (2)$$

Для дискретизации производной по времени в расчетах использовалась явная схема Эйлера первого порядка точности. Для расчета потоков на грани контрольного объема  $F_{i+1/2}$  используется точное решение задачи о распаде произвольного разрыва [2, 3].

### Постановка граничных условий

Для расчета необходимо задать начальные и граничные условия. Начальное распределение параметров может быть задано произвольно, в частности может быть задано постоянным, равное входным параметрам. При решении системы уравнений, начальное условие эволюционирует и "подстроится" к граничным условиям. Граничные условия нельзя задавать произвольным образом. Для того, чтобы краевая задача была корректно поставлена, необходимо чтобы количество условий заданных на границе соответствовало ее типу. Задание же большего количества условий на границе переопределяет задачу. Рассмотрим постановку граничных условий на примере дозвукового втекания и дозвукового вытекания потока рис. 1.

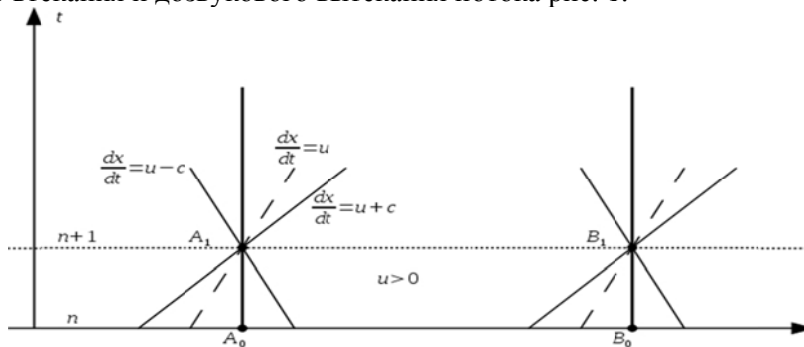


Рис. 1. Схема характеристик при дозвуковом втекании и вытекании потока

Предположим, что поток движется слева направо и на границах имеет дозвуковую скорость. Тогда слева будет граница втекания  $A$ , а справа граница вытекания  $B$ . На рисунке изображены линии характеристик соответствующие собственным числам системы уравнений. Известно, что зная значения параметров на временном слое  $n$  можно определить значения параметров находящихся внутри характеристического треугольника. На входную границу из внутренней области приходит одна характеристика, а из внешней области приходит две характеристики. Таким образом, для определения всех параметров потока в точке  $A_1$  необходимо задать в ней две связи между параметрами потока, причем хотя бы одна из этих связей должна содержать плотность. Следовательно, в дозвуковом потоке граничное условие во входном сечении должно состоять из двух условий, из которых хотя бы одно должно содержать плотность газа [4]. На выходной же границе необходимо задавать одно и только одно условие. При сверхзвуковом втекании потока необходимо задавать все три условия. А при сверхзвуковом вытекании задавать граничные условия не нужно (можно, например, задать мягкие условия вытекания).

На практике истечение происходит из некоторого резервуара, нагнетателя или камеры сгорания. Скорость потока в этих устройствах пренебрежимо мала или равна нулю, а другие параметры, как правило, известны. Поэтому в расчетах при задании граничных условий на входе в канал удобно задавать условия характеризующее параметры в камере (например полное давление и полную температуру). При дозвуковом истечении в некоторую область давление на срезе канала равно давлению окружающей среды. Поэтому при расчете на выходной границе удобно задавать давление, равное давлению окружающей среды. Таким образом, можно задать перепад давления между входом и выходом, который определит все течение в канале.

При расчете соотношений предположим, что профиль канала на границах области является прямым  $\frac{dS}{dx} = 0$ . Тогда система уравнений (1) преобразуется в систему одномерной газовой динамики. Это предположение немного упростит дальнейшие выкладки и не повлияет на постановку граничных условий. В физических переменных система одномерной газовой динамики записывается следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + a \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

где вектор физических переменных  $V = (\rho, u, p)^T$  и  $a$  якобиан потока. Известно, что якобиан системы уравнений можно диагонализировать:

$$a = R\Lambda L,$$

где  $\Lambda$  - диагональная матрица составленная из собственных чисел,  $L$  - матрица составленная из левых собственных векторов,  $R = L^{-1}$  - матрица состав-



ленная из правых собственных векторов. Домножив слева на матрицу левых  $L$  собственных векторов позволит привести систему уравнений к характеристическому виду:

$$L \frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda L \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Это соотношение известно как дифференциальная форма условий совместности и в раскрытом виде записывается так:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + u \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= 0 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + (u - c) \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= 0 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + (u + c) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Первое уравнение соответствует собственному числу  $\lambda = u$ , а второе и третье  $\lambda = u - c$  и  $\lambda = u + c$ , соответственно.

Как уже говорилось, на входной дозвуковой границе необходимо задать два дополнительных соотношения. Для истечения из камеры сгорания удобно задавать полную энтальпию и адиабату Пуассона:

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}, \quad \theta = \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}, \quad (4)$$

которые не меняются в стационарном течении.

Для построения алгоритма работающего в общем случае удобно применять не соотношения (4), а равенство нулю их производных по времени [5]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0.$$

Последнее можно переписать через производные по физическим переменным:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Этим двум соотношениям необходимо добавить соотношение для входящей из внутренней области характеристике из (3) соответствующей  $\lambda = u - c$ . Тогда система уравнений для входной дозвуковой границы может быть записана в матричной форме:

$$P \frac{\partial V}{\partial t} = B, \quad (5)$$

где  $\frac{\partial V}{\partial t} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \quad \frac{\partial p}{\partial t} \right)^T$  вектор производных физических переменных по времени, вектор правых частей и матрица  $P$  имеют следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -(u-c)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \rho} & \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial p} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} & \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^2} & u & \frac{\gamma-1}{\rho} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \\ -\gamma \frac{p}{\rho^{\gamma+1}} & 0 & \frac{1}{\rho^{\gamma}} \end{pmatrix}.$$

Соотношение (5) построено для граничной ячейки и отражает входное дозвуковое граничное условие. Если его домножить слева на обратную матрицу  $P^{-1}$ , то можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (P^{-1})B. \quad (6)$$

Заметим, что при расчете соотношений во входной граничной ячейке по (6) в матрице  $P^{-1}$  важен лишь второй столбец. Выполнив преобразования можно получить соотношения выражающие производные по времени от параметров для входной граничной ячейки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\rho u}{c} \frac{(u-c)}{(u+c)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -c \frac{(u-c)}{(u+c)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= c \rho u \frac{(u-c)}{(u+c)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Входящие в это выражение производные по времени и по пространству можно аппроксимировать конечными разностями. Для вычисления пространственных производных в вектор столбце  $B$  можно использовать «правые» разности, так как это отвечает направленности распространения этого возмущения - отрицательному значению собственного числа  $\lambda = u - c$ . Если для дискретизации по времени использовать схему первого порядка, а по пространству схему против потока первого порядка, то получим выражения для вычисления параметров на границе на следующем временном слое  $n+1$  в первой граничной ячейке:

$$\begin{aligned} \rho_1^{n+1} &= \rho_1^n + \left( \frac{\rho u}{c} \right)_1^n \left( \frac{u-c}{u+c} \right)_1^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Delta^+ u - \left( \frac{1}{\rho c} \right)_1^n \Delta^+ p \right) \\ u_1^{n+1} &= u_1^n - c_1^n \left( \frac{u-c}{u+c} \right)_1^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Delta^+ u - \left( \frac{1}{\rho c} \right)_1^n \Delta^+ p \right) \\ p_1^{n+1} &= p_1^n + (c \rho u)_1^n \left( \frac{u-c}{u+c} \right)_1^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Delta^+ u - \left( \frac{1}{\rho c} \right)_1^n \Delta^+ p \right) \end{aligned} \quad (7)$$

В этом выражении приращение параметров  $\Delta^+ u$  и  $\Delta^+ p$  записываются следующим образом:



$$\begin{aligned}\Delta^+ u &= u_2^n - u_1^n \\ \Delta^+ p &= p_2^n - p_1^n\end{aligned}$$

Таким образом, в начальный момент времени в первой ячейке необходимо задать параметры соответствующие параметрам в камере (4). Параметры в последующие моменты времени рассчитываются по соотношениям (7), которые соответствуют граничным условиям дозвукового втекания.

Для выходной границы можно проделать аналогичные выкладки. Из внутренней области на границу приходят две характеристики, а из внешней одна. Поэтому на выходной границе необходимо задать одно соотношение. Для дозвукового истечения удобно задавать  $p = p_{out} = \text{const}$ , так как при дозвуковом истечении струи давление на срезе равно давлению в атмосфере. Применяя такой же подход и учитывая, что для дозвуковой выходной границы  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ , получим систему уравнений для граничной точки  $M$  в матричном виде  $P \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) = B$ , где матрица  $P$  и вектор столбец  $B$  имеют следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -u \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ 0 \\ -(u+c) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В данном случае искать обратную матрицу  $P^{-1}$  не нужно. Если в выражении (8) выполнить умножение матрицы  $P$  на вектор столбец  $\frac{\partial V}{\partial t}$  и учесть что  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ , то можно получить соотношения для производных по времени в граничной ячейке.

Для аппроксимаций производных по пространству необходимо использовать «левые» разности. Соотношения для вычисления параметров на временном слое  $n+1$  в граничной ячейки с индексом  $M$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\rho_M^{n+1} &= \rho_M^n - u_M^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Delta^- \rho - \left( \frac{1}{c^2} \right)_M \Delta^- p \right) \\ u_M^{n+1} &= u_M^n - (u+c)_M^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Delta^- u + \left( \frac{1}{\rho c} \right)_M \Delta^- p \right), \\ p_M^{n+1} &= p_M^n\end{aligned}$$

где приращения плотности, давления и скорости записываются следующим образом:

$$\Delta^- \rho = \rho_M^n - \rho_{M-1}^n$$

$$\Delta^- u = u_M^n - u_{M-1}^n$$

$$\Delta^- p = p_M^n - p_{M-1}^n$$

### Результаты расчетов

Интегрирование системы уравнений (2) по времени ведется до тех пор, пока не будет достигнут стационарный режим. О достижении стационарного режимов можно судить по тому, как отличается решение на слое  $n$  от решения на слое  $n+1$ . Это можно делать, оценивая  $L_2$  норму приращения сеточного решения. Формула  $L_2$  нормы для определения таким образом сходимости решения имеет следующий вид:

$$L_2(U) = \sqrt{\sum_{i=1}^M (U_i^{n+1} - U_i^n)^2}$$

Решение можно считать сошедшимся, если  $L_2 < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  некоторая заданная малая величина.

Будем рассматривать течение в канале круглого сопла с еременной площадью проходного сечения. Профиль сопла описывается описывается следующим соотношением:

$$r(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{\pi}}, \quad x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$

Течение в канале сопла происходит без отрыва и входная граница находится слева, а выходная справа. На входе задаются параметры соответствующие параметрам в камере, на выходе задается давление окружающей среды.

Для начала рассмотрим течение с образованием скорости выше скорости звука. При определенных параметрах на входе и выходе может образоваться течение с запирающим скачком уплотнения. При этом, поток на входе в расчетную область является дозвуковым. В сужающейся части сопла поток сначала будет разгоняться, достигнет скорости звука в самом узком, критическом сечении и продолжит течь уже со сверхзвуковой скоростью. В некотором сечении расширяющейся части образуется прямой скачек уплотнения и поток за ним опять становится дозвуковым. После скачка уплотнения поток замедляется и на выходе истекает в дозвуковом режиме. Такие конфигурации существуют при выходе на режим сопловых течений при запуске. В одномерной постановке есть аналитическое решение этой задачи и поэтому с ним сравниваются результаты расчета.

Одна из реализаций такого режима осуществится при истечении воздуха, давлении в камере  $p_0 = 10^6$  Па, температуре торможения  $T_0 = 300$  К и давлении на выходе  $p_{out} = 8 \cdot 10^5$  Па. На рис. 2 приведены распределения давления и числа Маха, сплошной линией отмечены значения вычисленные по аналитическим зависимостям, а кружками значение полученные численным





методом. Численное решение производилось на сетке из 50 ячеек. В этой задаче везде число Маха  $M > 0.4$ , поэтому она хорошо решается изложенным методом контрольного объема. Видно, что численное решение хорошо совпадает с аналитическим.

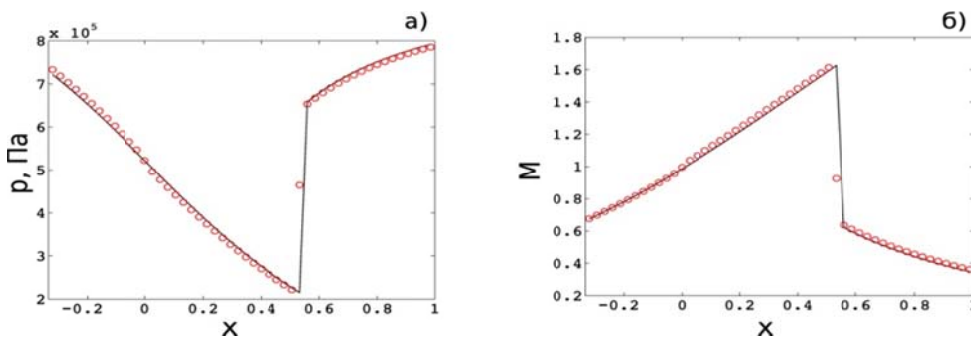


Рис. 2. Распределение давления (а) и распределение числа Маха (б) вдоль канала сопла

Далее будем рассматривать течение в таком же канале, но дозвуковое во все области. На входе, так же задается давление и температура, а на выходе только давление. Для течений в канале удобно задавать перепад давления между входом и выходом. При перепаде давления  $\Delta p = 1600$  Па, число Маха в критическом сечении приблизительно будет равно  $M = 0.3$ . На выходе, выставляется давление равное давлению в окружающей среде  $p_{out} = 1 \cdot 10^5$  Па. На рис. 3 приведены распределения скорости и числа Маха для данной задачи при расчете на 100 ячейках.

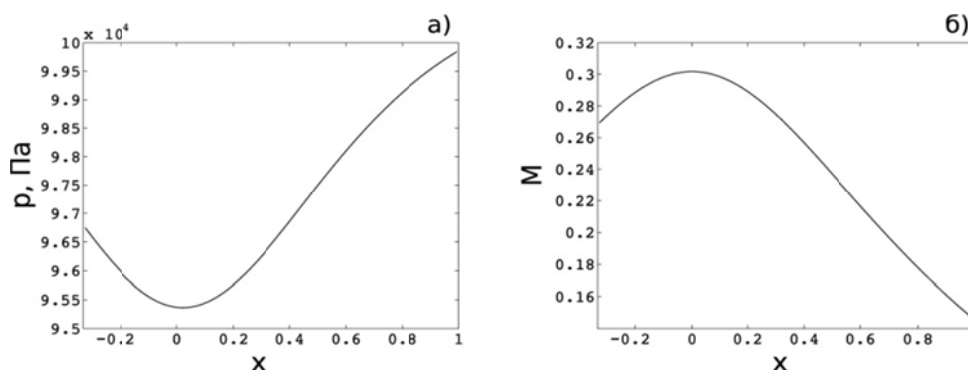


Рис. 3. Распределение скорости (а) и распределение числа Маха вдоль канала сопла

На рис. 4 приведен графики сходимости решения ( $L_2$  нормы) в зависимости от количества итераций при использовании 20 ячеек. На графиках вверх откладывается десятичный логарифм нормы.

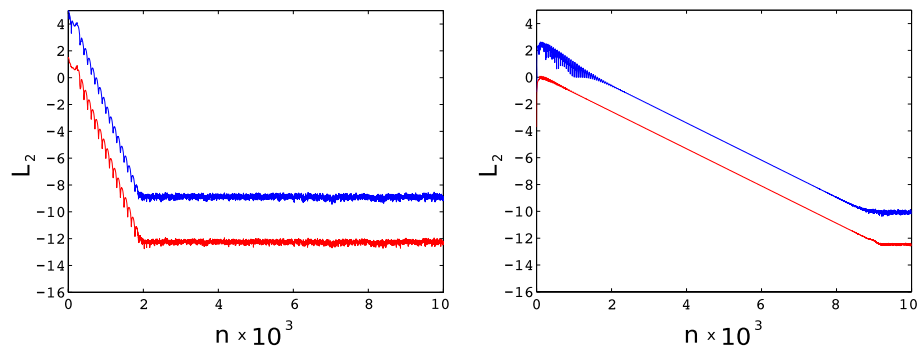


Рис. 4. Скорость сходимости решения в случае течения с запирающим скачком уплотнения (а) и при дозвуковом (б) течении и перепаде  $\Delta p = 1600$  Па

Из графиков сходимости видно, что сходимость ухудшается при уменьшении скорости потока. Это связано с особенностью системы уравнений газовой динамики при описании течений с малыми числами Маха. Для устранения жесткости системы при малых скоростях используют подходы предобуславливания [6].

#### Заключение и выводы

Предложена реализация постановки дозвуковых граничных условий для системы уравнений газовой динамики. Решены задачи о квазиодномерном течении в канале с всюду дозвуковой скоростью и с локально сверхзвуковой областью. Такие упрощенные постановки задач с детальным исследованием особенностей реализации необходимы создания работоспособных и высокопроизводительных алгоритмов постановки граничных условий в пакетах, ориентированных на решение прикладных задач нестационарной газодинамики.

#### Библиографические ссылки

1. Лебедев А.С., Чёрный С.Г. Практикум по численному решению уравнений в частных производных / Учебное пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2000.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: "Наука", 1976. 400 с.
3. Toro Eleuterio F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Prectial Introduction - 2.ed.Springer, 1999. 606 p.
4. Соркин Р. Е. Газотермодинамика ракетных двигателей на твёрдом топливе. - Наука; Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1967. - 368 с.
5. Hirsch C. Numerical Computation of Internal and External Flows // Wiley, 1994
6. Weiss J.M. and Smith W.A. Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows // AIAA J.,1995, Vol. 33, No. 11., pp. 2050-2057.