ВЕСТНИК ТОГУ. 2013. № 1(28)

УДК 519.95

© А. Г. Подгаев, 2013

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТВЕГА-ДЕ ВРИЗА-БЮРГЕРСА СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. III. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ

Подгаев А. Г. – д-р физ.-мат. наук, доц. зав. кафедрой «Высшая математика», тел.(4212) 224423, e-mail: podgaev@mail.ru (ТОГУ)

В этой работе представлены завершающие результаты по исследованию начально-краевой задачи в ограниченной области для двух случаев уравнения Кортвега-де Вриза – с нелинейным членом второго порядка и без него. Здесь рассматривается случай малой гладкости начальной функции и при отсутствии у уравнения нелинейности по второй производной (μ=0) представлены результаты о существовании слабых решений у изучаемого уравнения. При этом мы существенно опираемся на результаты предыдущих работ [1, 2]. В дополнение к результатам этих работ представлено доказательство единственности регулярных решений задачи.

The paper deals with final results of studying the initial boundary value problem in a limited area for two cases of the Kortveg-de Vries equation. In the first case equation contains the second order nonlinear term, and in the second case it does not. Here is considered a low smoothness of the initial function. Results on the existence of weak solutions of the equation under study are provided for the case that the second derivative (μ=0) is linear. Uniqueness of regular solution is proved in this article too.

Ключевые слова: слабое решение, краевые условия, разрешимость, предельный переход, уравнение Кортвега-де Вриза-Бюргерса.

Продолжаем изучать в ограниченной области Q=(0,1)x(0,T) уравнение

$$Lu = u_t + uu_x + \nu u_{xxx} - \alpha\left(u_x^2 + \mu u_{xx}^2 - 1\right)u_{xx} = 0, \quad \nu > 0, \quad \alpha \geq 0, \; \mu \geq 0, \qquad (1)$$

обращающееся при $\alpha = 0$ в уравнение Котвега-де Вриза. В оставшейся части работы мы будем предполагать, что $\mu = 0$. При $\nu = 0$, $\mu = 0$ оно является обобщением уравнения Бюргерса на случай когда коэффициент вязкости $\alpha\,(u_x^2 - 1)$ зависит от градиента скорости. В (1) этот коэффициент не только допускает вырождение (обращается в ноль), но и меняет знак. Здесь для случая $\mu = 0$, и при $u_0 \in W_2^1(0,1)$, $u_0(1) = 0$, будет доказано существование слабых решений для уравнения (1) в области Q=(0,T)×(0,1) следующей краевой задачи

$$u(x,0) = u_0(x);\; u_x(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(1,t) + \beta u_x(1,t) = 0 \qquad (2)$$

Случай $\mu = 0$ имеет важное значение так как с одной стороны член со второй производной (в уравнении Бюргерса) учитывает вязкую добавку и должен иметь вид νu_{xx}, где ν (вязкость) не должна зависеть от u_{xx}, а с другой — в этом случае получим уравнение Бюргерса (с вязкостью зависящей от градиента и допускающей смену знака) регуляризованное уравнением третьего порядка. Важность рассмотрения такой регуляризации отмечалась в [1] и в указанных там ссылках.

При α=0 (случай уравнения Кортвега-де Вриза), в дополнение к построенным в [1], [2] сильным решениям, в этой работе построим и слабые решения задачи, ослабив требования на гладкость начальной функции. Необходимость искать слабые решения продиктована требованием принадлежности начальной функции классу W_2^1. В этом случае сильных решений не существует.

Обоснование существования слабых решений

Рассмотрим пространство H функций u(x,t), полученных замыканием гладких функций по норме $L_2(0,T;W_2^2) \cap L_\infty(0,T;W_2^1)$, и удовлетворяющих краевым условиям по переменной x из (2). Заметим, что краевое условие со второй производной при таком замыкании «теряется». Однако его будет «нести» функция из следующего определения слабого решения.

Определение. Функцию $u \in H$ для которой $\alpha u_x u_{xx}$, $\alpha u_x^2 \in L_2(Q)$, $u_{xxx} \in L_{p'}(0,1;W_2^{-1}(0,T))$, $u_t \in L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(0,1))$, (где p = 2, если α = 0 и p=4, если α > 0, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) будем называть слабым решением задачи (1) (с $\mu = 0$) - (2), если начальное условие и краевые условия $u(1,t) = u_x(0,t) = 0$ удовлетворяются в смысле следов из $L_2(0,T)$ и имеет место тождество ($\mu = 0$)

$$\int_Q [u g_t + \nu u_{xx} g_x + \alpha(u_x^2 + \mu u_{xx}^2 - 1) u_{xx} g - u u_x g] dQ = \nu\beta \int_0^T u_x(1,t) g(1,t) dt \qquad (3)$$

для любой функции g из $W_2^1(Q)$, равной нулю при t = 0, t = T и при x = 0.

Замечание. В это тождество погружено краевое условие $u_{xx}(1,t) + \beta u_x(1,t) = 0$, которое из него может быть выведено, поскольку слабое решение удовлетворяет включению $u_{xx} \in C(0,1; W_2^{-1}(0,T))$ и u_{xx} имеет, таким образом, след при x = 1.

Теорема 1. *Пусть* $\mu = 0, \quad \alpha > 0$ *и выполнены условия*

$$3\beta\nu > 2\alpha \quad \text{и} \quad 2+\beta > \exp(\beta) \tag{4}$$

Тогда для любой функции $u_0(x) \in W_2^1(0,1)$*, удовлетворяющей условию* $u_0(1) = 0$ *на любом интервале* $[0,T]$ *существует слабое решение задачи (1)-(2).*

Теорема 2. *Пусть* $\alpha = 0$ *и выполнены условия (4). Тогда для любой функции* $u_0(x) \in W_2^1(0,1)$ *такой, что* $u_0(1) = 0$ *локально при* $t < t^*$*, или на* $[0,T]$ *при малых значениях величины* $\int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx$ *в смысле теоремы 2 из [1], существует слабое решение задачи (1)-(2) для уравнения Кортвега-де Вриза.*

Замечание 1. Условие (4) выполнено, например, при $0 < \beta \le 1{,}1; \quad \nu > \frac{20}{33}\alpha \ge 0.$

Замечание 2. Промежуток существования решения согласно оценкам, полученным в [1], оценивается величиной

$$t < t^* < \frac{1}{\bar{c}_1} \ln \left(1 + \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2 \int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx} \right),$$

где $c_1 = \nu\beta^3 + 1$, $c_2 = (1/(3\beta\nu) + \beta^2)((1 - \exp(-\beta))/\beta)$, $\ell = \exp$. (Мы положили $\delta = \frac{3}{2}\beta\nu$ в работе [1])

С другой стороны, если величина $\int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx$ мала настолько, чтобы знаменатель в дроби $y \le \dfrac{\ell^{\bar{c}_1 t} \int_0^1 \ell^{\beta \chi} u_{0x}^2 dx}{1 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1}(\ell^{\bar{c}_1 t} - 1)\int_0^1 \ell^{\beta x} u_{0x}^2 dx}$ при заданном t=T был положительный, то решение задачи существует при всех $t \in [0,T]$.

Доказательство теорем 1 и 2. Возьмем, для начала, в качестве начальной функции $u_0^s(x)=\sum_{i=1}^{s}c_i\varphi_i\in W_2^2(0,1)$, где $c_i=\lambda_i(u_0,\varphi_i)_{L_2}$, а $\varphi_i\in C^\infty[0,1]$ построены в [1] и удовлетворяют условиям $\varphi_x^i(0)=\varphi^i(1)=\varphi_{xx}^i(1)+\beta\varphi_x^i(1)=0.$, $\varphi_{xxx}^i(0)+2\beta\varphi_{xx}^i(0)=0$. В пункте 1 работы [1] доказано, что $u_0^s\to u_0$ в $W_2^1(0,1)$, а в пункте 3, что в этом случае $\|u_0^s\|_{W_2^1}$ равномерно ограничена по s. Рассмотрим уравнение (1) с $\mu=1/s>0$. Тогда согласно теоремам 1, 2 и 3, сформулированных в [1] и доказанных в [1] и [2], (для выполнения условий теоремы 1 из [1] надо выбрать, например, $\lambda=\beta$ и тогда её условия будут выполнены при больших s таких, что $2+\beta-e^\beta>\frac{\beta^2}{2s}$) существует регулярное решение u^s уравнения (1), при этом все члены, входящие в уравнение являются суммируемыми с квадратом по Q функциями, выполнено интегральное тождество

$$\int_Q LuhdQ=0 \qquad \forall h\in L_2(Q). \tag{5}$$

и равномерные по *s* оценки ($u=u^s$, индекс s опущен), (см. неравенство (14) работы [1])

$$\int_0^1 \ell^{\beta x}u_x^2dx+\int_Q(\alpha u_{xx}^2u_x^2+\nu u_{xx}^2+\mu\alpha u_{xx}^4)dQ+\int_0^T\big[\nu u_{xx}^2(1,t)+$$
$$+\nu u_{xx}^2(0,t)+\alpha u_x^4(1,t)+u_x^2(1,t)\big]dt\le c,\ \alpha>0, \tag{6}$$

и аналогичные оценки при α=0 при соответствующих условиях малости Теоремы 2 (см. оценку (16) из [1]):

$$\int_0^1 e^{\beta x}u_x^2dx+\nu\int_0^1 e^{\beta x}u_{xx}^2dQ+\nu\int_0^T[u_{xx}^2(1,t)+u_{xx}^2(0,t)]dt\le c \text{ ,(6')}$$

где c зависит от нормы u_0 в $W_2^1(0,1)$ и не зависит от s $(\mu=1/s)$. Из (6) при $\alpha>0,$ и (6') при $\alpha=0$ нетрудно вывести раномерные оценки

$$\|uu_x\|_{L_2(Q)}\le c \tag{7}$$

$$\alpha\ \left\|\left(u_x^2+\mu u_{xx}^2-1\right)u_{xx}\right\|_{L_{4/3}(Q)}\le c, \tag{8}$$

$$\|\nu u_{xxx}\|_{L_2\left(0,T;W_2^{-1}(0,1)\right)}\le c \tag{9}$$

где *c* не зависит от *s*, а $W_2^{-1}(0,1) = (\overset{0}{W}{}_2^1(0,1))^*$ - сопряженное к $\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ пространство, согласованное с двойственностью в L_2. Отождествляя $L_2(0,1)$ с ему сопряженным, получим плотные вложения

$$\overset{0}{W}{}_2^1(0,1) \subset L_4 \subset L_2 \subset L_{4/3} \subset W_2^{-1}.$$

Поскольку уравнение (1) для u^s удовлетворяется почти всюду, из последнего включения и указанных выше равномерных по s оценок (μ=0) получаем

$$\left\|u_t^s\right\|_{L_{p'}\left(0,T;W_2^{-1}(0,1)\right)} = \left\|\nu u_{xxx} + uu_x - \alpha(u_x^2 + \mu u_{xx}^2 - 1)u_{xx}\right\|_{L_{p'}\left(0,T;W_2^{-1}(0,1)\right)} \le c, \quad (10)$$

где $p=2$, при α=0; $p=4$, при α>0, p' - сопряженное к p.

Теперь к семеству функций u^s применим теорему 1 из [3] для случая, когда $B_1 = W_2^{-1}(0,1)$, $B = W_2^1(0,1)$, $p_1 = p'$, S - шар в $W_2^2(0,1)$ или результат Дубинского Ю.А. о компактности из [6]. Тогда из оценок (6), (6') и (10) можем заключить, что существует подпоследовательность последовательности u^s, ($s=s_k$), которая сходится по норме $L_q(0,T;W_2^1(0,1))$, где $q \ge 1$ любое, к некоторой функции $u \in L_\infty(0,T;W_2^1(0,1)) \cap L_2(0,T;W_2^2(0,1))$ и для которой $\alpha(u_x^s)^3$, s=sk, сходится поточечно к αu_x^3 при $s \to \infty$. Очевидна также слабая в L_2 сходимость u_{xx}^s к u_{xx}.

Добавляя к установленной поточечной сходимости вытекающую из (6) оценку $\left\|\alpha(u_x^s)^3\right\|_{L_{4/3}(Q)} \le c$, получим слабую в $L_{4/3}(Q)$ сходимость $\alpha(u_x^s)^3$ к αu_x^3, а также сходимость $u^s u_x^s$ к uu_x в $L_2(Q)$. Но из (6) следует также, что

$$\left|\mu\int_Q u_{xx}^3 h dQ\right| \le \mu\left(\int_Q u_{xx}^4 dQ\right)^{3/4}\left(\int_Q h^4 dQ\right)^{1/4} =$$
$$= \mu^{1/4}\left(\mu\int_Q u_{xx}^4 dQ\right)^{3/4}\|h\|_{L_4(Q)} \le c\mu^{1/4} \to 0 \text{ при } s \to \infty. \quad (11)$$

Чтобы использовать эти факты для предельного перехода, преобразуем интегральное тождество (5) .

Рассмотрим плотное в $L_2(Q)$ множество функций h со следующими свойствами:

$$h_x \in L_p(Q);\ h \in W_2^1(Q);\ h(0,t) = 0;$$
$$h=0 \text{ при } t=0 \text{ и при } t=T \quad (\text{или } t = t^*).$$

Перебросим производную по t на h и производные по x с u_{xxx} и с $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u_x^3}{3}-u_x)$ на h. Используя краевые условия $u_{xx}^s(1)+\beta u_x^s(1)=0$, получим для $u=u^s$,

$$-\nu\int_Q u_{xx}^s h_x dQ-\nu\beta\int_0^T u_x^s(1,t)h(1,t)dt-\int_Q u^s h_t dQ+$$

$$+\alpha\int_Q(\frac{u_x^3}{3}-u_x)h_x dQ-\alpha\int_0^T(\frac{u_x^3}{3}(1,t)-u_x(1,t))h(1,t)dt+ \qquad (12)$$

$$+\int_Q uu_x hdQ+\mu\int_Q u_{xx}^3 hdQ=0 .$$

Последний член исчезает при $\mu=\frac{1}{s}\to 0$ благодаря (11). В первом и четвёртом членах предельный переход обоснован рассуждениями, проведенными перед неравенством (11).

Известно, что если $\|u_{xx}^s\|_{L_2(0,T;L_2(0,1))}\le c$, то найдется подпоследовательность, для которой

$$u_x^s(1,t)\to u_x(1,t) \text{ в } L_2(0,T) \text{ и почти всюду на [0,T]}, \qquad (13)$$

где $u_x(x,t)$ - слабый предел $u_x^s(x,t)$. При этом, естественно, предельная функция $u(x,t)$ такова, что $u_x \in C([0,1]; L_2(0,T))$. Поэтому во втором члене предельный переход также обоснован.

Для обоснования предельного перехода в пятом граничном члене, связанном с α, напомним, что из (6) следует оценка

$$\alpha\int_0^T|u_x^s|^4(1,t)dt\le c .$$

С учетом (13) отсюда следует слабая в $L_{4/3}(0,T)$ сходимость $\alpha(u_x^s(1,t))^3$ к $\alpha u_x^3(1,t)$.

Таким образом, установлено, что предельная функция также удовлетворяет тождеству (12) с $\mu=0$, которое эквивалентно интегральному тождеству из определения слабого решения ($\mu=0$).

Обоснование выполнения граничных и начальных условий

Из (12) в частности следует, что уравнение (1) для предельной функции удовлетворяется в смысле распределений, т.е.

$$\nu u_{xxx} = \alpha(u_x^2 - 1)u_{xx} - u_t - uu_x \text{ в } D'(Q). \qquad (14)$$

Поскольку по теореме Фубини $u \in L_2(0,1; L_2(0,T)) = L_2(0,T; L_2(0,1))$, то $u_t \in L_2(0,1; W_2^{-1}(0,T))$. Кроме того, член с α принадлежит $L_{4/3}(0,1; L_{4/3}(0,T))$, а $uu_x \in L_2(Q)$. Поэтому,

$$u_{xxx} \in L_{p'}(0,1; W_2^{-1}(0,T)), \qquad (15)$$

p=4, если $\alpha > 0$ и *p=2*, если $\alpha = 0$, а p' - сопряженное к *p*.

Согласно лемме 1.2 из [4], стр.20, $u_{xx} \in C([0,1]; W_2^{-1}(0,T))$. Следовательно, $u_{xx} + \beta u_x$ имеет след при *x=1.*

Докажем, что из (12) следует выполнение краевого условия $u_{xx} + \beta u_x = 0$ при *x=1.*

Отождествим пространство $L_2(0,1; L_2(0,T))$ с ему сопряженным пространством и пусть $<,>$ - двойственность между $L_p(0,1; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T))$ и ему сопряженным $L_{p'}(0,1; W_2^{-1}(0,T))$. Тогда имеют место вложения

$$L_p(0,1; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)) \subset L_p(0,1; L_2(0,T)) \subset L_2(0,1; L_2(0,T)) \subset L_{p'}(0,1; L_2(0,T)) \subset L_{p'}(0,1; W_2^{-1})$$

причем каждое предыдущее пространство, плотно в последующем. Поэтому можно считать, что скалярное произведение в $L_2(0,1; L_2(0,T))$ согласовано с двойственностью $<,>$ между $L_p(0,1; L_2(0,T))$ и $L_{p'}(0,1; L_2(0,T))$ и между $L_p(0,1; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T))$ и $L_{p'}(0,1; W_2^{-1}(0,T))$, т.е.

$$\langle v, g \rangle = \int_0^1 \left(\int_0^T vg dt \right) dx \qquad \forall v \in L_2(Q), \qquad \forall g \in L_p(0,1; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)) \qquad (16)$$

А в силу отождествления $(L_p)^*$ с $L_{p'}$ можно считать также, что

$$\langle v, g \rangle = \int_0^1 \left(\int_0^T vg dt \right) dx \qquad \forall v \in L_{p'}(Q), \qquad \forall g \in L_p(Q). \qquad (17)$$

Аналогично указанной цепочки четырёх включений можно написать цепочку плотных и непрерывных вложений

$$C_0^\infty \subset \overset{0\ 1}{W}_p(0,1; \overset{0\ 1}{W}_p(0,T)) \subset \overset{0\ 1}{W}_p(0,1; \overset{0\ 1}{W}_2(0,T)) = \overset{0\ 1}{W}_2(0,T; \overset{0\ 1}{W}_p(0,1)) \subset$$

$$\subset L_p(0,T; \overset{0\ 1}{W}_p(0,1)) \subset L_p \subset L_2 \subset L_{p'} \subset L_{p'}(0,T; W_{p'}^{-1}(0,T)) \subset$$

$$\subset L_2(0,T; W_{p'}^{-1}(0,1)) \subset W_2^{-1}(0,T; W_{p'}^{-1}(0,1)) L_p =$$

$$= W_p^{-1}(0,1; W_2^{-1}(0,T)) \subset W_{p'}^{-1}(0,1; W_{p'}^{-1}(0,T)) \subset D',$$

($p=2$, если $\alpha = 0$ и $p=4$, при $\alpha > 0$)

и рассматривать уравнение (14) (следующее из (12) при $\mu = 0$) в смысле равенства функционалов над $\overset{0}{W}{}_p^1(0,1;\overset{0}{W}{}_p^1(0,T))$, то есть

$$<< u_t + uu_x + \nu u_{xxx} - \alpha(u_x^2 - 1)u_{xx}, g >>= 0$$

$$\forall g \in \overset{0}{W}{}_p^1(0,1;\overset{0}{W}{}_p^1(0,T)).$$

Из включения $u \in W_2^2(0,1;L_2(0,T))$ следует, что $u_t \in W_2^2(0,1;W_2^{-1}(0,T))$. Кроме того, $uu_x \in L_2(Q)$, $\alpha(u_x^2 - 1)u_{xx} \in L_{p'}(Q)$, и выполнено (15). Поэтому, по теореме Хана-Банаха этот функционал «почленно» можно продолжить на функции $g \in L_p(0,1;\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))$. При этом продолженные функционалы можно считать теми же самыми обобщенными производными от функции u (или ее агрегата). Таким образом, если $< , >_T$ - двойственность между $\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))$ и $W_2^{-1}(0,T)$, то, в силу (16), (17),

$$\int_0^1 < u_t, g_2 >_T g_1 dx + \int_Q (uu_x + \alpha(u_x^2 - 1)u_{xx}) g dQ +$$

$$+ \nu \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial x^3}[< u, g_2(t) >_T] g_1(x) dx = 0 \tag{18}$$

$$\forall g = g_1(x) g_2(t) \in L_p(0,1;\overset{0}{W}{}_2^1(0,T)).$$

Рассмотрим равенство (18) на функциях $g = g_1 g_2$, где функция $g_1(x) \in W_p^1(0,1)$ и удовлетворяет только краевому условию вида $g_1(0) = 0$. Благодаря плотности таких g_1 в $L_p(0,1)$ и включению $u_{xx} + \beta u_x \in C(0,1;\overset{0}{W}{}_2^{-1}(0,T))$, тождество (18) эквивалентно соотношению

$$\int_Q (-ug_t + uu_x g - \alpha(u_x^2 - 1)u_{xx} g) dQ - \nu \int_Q u_{xx} g_x dQ +$$

$$+ \nu < u_{xx}(1), g_2(t) > g_1(1) = 0 \quad \forall g = g_1 g_2 \in W_p^1(0,1;\overset{0}{W}{}_2^1(0,T)). \tag{19}$$

Отметим, что мы воспользовались тем, что скалярное произведение в $L_2(0,T)$ согласовано с двойственностью между между $\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))$ и $W_2^{-1}(0,T))$, то есть

$$< u_{xx}, g_2(t) >_T = \int_0^T u_{xx} g_2(t) dt,$$

$$< u_t, g_2(t) >_T = - < u, g_2'(t) >_T = -\int_0^T u g_{2t} dt.$$

Мы установили, что для $u = \lim_{s\to\infty} u^s$ выполнено (12) с $\mu = 0$. Возьмем $h = g_1 g_2$, что допустимо. Сравнивая (12) с (19), сворачивая член с α к виду, который в (19), заключаем, что

$$< u_{xx}(1,t) g_1(1), g_2(t) >_T = -\beta \int_0^T u_x(1,t) g_1(1) g_2(t) dt =$$

$$= -\beta < u_{xx}(1,t) g_1(1), g_2(t) >_T \quad \forall g_2 \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,T),$$

то есть поскольку $g_1(1) \neq 0$, выполнено равенство

$$u_{xx}(1,t) + \beta u_x(1,t) = 0 \text{ в } \overset{0}{W}{}_2^{-1}(0,T).$$

Это точный смысл краевого условия.

Кроме того, подставляя это соотношение в (12) (с $u = \lim u^s$ и $\mu = 0$), мы получим, что для $u(x,t)$ выполнено то самое интегральное соотношение, которое было сформулировано в определении слабого решения.

Выполнение краевых условий $u(1,t) = 0 = u_x(0,t)$ не вызывает сомнений, поскольку замыкание гладких функций с этим условием по норме $L_2(0,T;W_2^2(0,1))$ также обладает этим свойством.

Докажем, что $u(x,0) = u_0(x)$.

Напомним, что для u_s,

$$u^s(x,0) = u_0^s(x) = \sum_{i=1}^{s} c_i \varphi_i(x), \quad c_i = (u_0, \varphi_i).$$

Из (19) следует, что

$$u_t = -\nu u_{xxx} + \alpha(u_x^2 - 1) u_{xx} + u u_x \quad \text{в } D'.$$

Поэтому

$$u_t \in L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(0,1)) \tag{20}$$

и, после, быть может, изменения на множестве нулевой на [0,T] меры, функция u является непрерывным отображением из [0,T] в $W_{p'}^{-1}(0,1)$,([4] стр. 20) то есть след $u(x,0)$ определен и является элементом $W_{p'}^{-1}(0,1)$. Ввиду плотных вложений $\overset{0}{W}{}_p^1(0,1) \subset L_p(0,1) \subset W_{p'}^{-1}(0,1)$, имеем

$$< u_t^s, \varphi(x) >= \frac{\partial}{\partial t} < u^s, \varphi(x) >= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 u^s \varphi(x)dx, \quad \varphi \in \overset{0}{W}{}_p^1(0,1).$$

Поэтому,

$$\int_0^1 u^s(x,t)\varphi(x)dx = \int_0^t < u_t^s, \varphi(x) > d\tau + \int_0^1 u_0^s(x)\varphi(x)dx. \tag{21}$$

Отсюда,

$$\int_Q \psi(t)\varphi(x)u^s(x,t)dxdt = \int_0^T\int_0^T \chi_t\psi(t) < u_t^s(\tau), \varphi(x) > d\tau dt + \int_0^T \psi(t)dt\int_0^1 u_0^s(x)\varphi(x)dx = \tag{22}$$

$$\int_0^T \psi_1(\tau) < u_t^s(\tau), \varphi(x) > d\tau + \psi_T \int_0^1 u_0^s(x)\varphi(x)dx,$$

здесь $\chi_t(\tau)$ - характеристическая функция интервала (0,t), а $\psi_1(\tau) = \int_0^T \chi_t(\tau)\psi(t)dt = \int_\tau^T \psi(t)dt, \quad \psi(t) \in L_p(0,T)$. Используя сходимость u_0^s к u_0, переходя к пределу в (22), получим аналогичное равенство (22) для предельной функции $u(x,t)$. Из которого в силу произвольности $\psi(t)$ можно вывести соотношение (21) для предельной функции:

$$\int_0^1 u(x,t)\varphi(x)dx = \int_0^t < u_t, \varphi > d\tau + \int_0^1 u_0(x)\varphi(x)dx.$$

Поскольку u имеет след при всех $t = t_1 \in [0,T]$, вычисляя интегральный член, получаем для всех $\varphi \in \overset{0}{W}{}_p^1(0,1)$:

$$< u(x,0), \varphi(x) >= \int_0^1 u_0(x)\varphi(x)dx =< u_0, \varphi(x) >.$$

Откуда $u(x,0) = u_0(x)$ в $W_{p'}^{-1}(0,1)$. Это точный смысл начального условия.

Теоремы 1 и 2 доказаны.

О единственности регулярного решения задачи

Теорема 3. *При* $\alpha = 0$ *и при* $\beta > 0, \quad 2 + \beta > \ell^\beta$, *задача (1), (2) имеет (локально при* $t < t^*$ *в смысле теоремы 2 или глобально при малых* u_{0x}*) и притом единственное регулярное решение.*

Доказательство существования регулярного решения проведено в [1], [2]. Пусть u_1 и u_2 являются регулярными решениями задачи, тогда $u_{it} \in L_2(Q)$, $u_{ixxx} \in L_2(Q)$, а функция $\omega = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению

$$\omega_t + \nu\omega_{xxx} = -\omega u_{2x} - \omega_x u_1$$

и однородным краевым и начальным условиям. Умножим это уравнение на $D(\ell^{\beta x}\omega_x)$ и проинтегрируем по (0, 1). Действуя также, как при выводе первой априорной оценки, в левой части мы получаем

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \ell^{\beta x}\omega_x^2 dx - \frac{3}{2}\beta\nu\int_0^1 \ell^{\beta x}\omega_{xxx}^2 dx + \frac{\beta^3\nu}{2}(\ell^{\beta x}, \omega_x^2) - \frac{\beta^2\nu}{2}\ell^{\beta x}\omega_x^2\Big|_{x=1} -$$

$$-\frac{\nu}{2}(\ell^{\beta x}\omega_{xx}^2(1,t) + \omega_{xx}^2(0,t)) - \frac{\beta^2\nu}{2}\ell^{\beta x}\omega_x^2(1,t).$$

Кроме того, для правой части

$$\int_0^1 u_1\omega_x l^{\beta x}\omega_{xx} dx \le \delta\int_0^1 l^{\beta x}\omega_{xx}^2 dx + c(\delta)\int_0^1 l^{\beta x}\omega_x^2 dx \int_0^1 l^{\beta x} u_{1x}^2 dx,$$

$$\int_0^1 u_1\omega_x \ell^{\beta x}\omega_x dx \le \max|u_1|\int_0^1 \ell^{\beta x}\omega_x^2 dx,$$

$$\int_0^1 u_{2x}\omega\ell^{\beta x}\omega_{xx} dx \le \delta\int_0^1 \ell^{\beta x}\omega_{xx}^2 dx + c(\delta, u_2)\int_0^1 \ell^{\beta x}\omega_x^2 dx,$$

$$\int_0^1 u_{2x}\omega\ell^{\beta x}\omega_x dx \le c(u_2)\int_0^1 \ell^{\beta x}\omega_x^2 dx.$$

Выбирая $2\delta < \frac{3}{2}\beta\nu$, из леммы Гронуолла следует единственность решения задачи для уравнения Кортвега-де Вриза.

Аналогично доказывается единственность решения задачи при $\alpha > 0$, $\mu = 0$, но только при дополнительном условии, что $u \in L_\infty(0,T;W_2^3(0,1))$.

Поскольку существование решения нами доказано только в классе $L_2(0,T;W_2^3(0,1))$, мы не обсуждаем детали.

Замечание. В силу известных теорем вложения $W_2^1(Q) \cap L_\infty(0,T;W_2^1(0,1)) \subset C^{1/2}(\bar{Q})$ регулярное решение задачи гёльдерово в $\bar{Q}$. Следовательно, оно (после изменения на множестве меры 0) непрерывно и в силу компактности вложения $C^{1/2}(\bar{Q}) \subset C(\bar{Q})$ удовлетворяет условиям при x=1 и t=0 поточечно.

Библиографические ссылки

1. *Подгаев А. Г.* Краевая задача для уравнения Кортвега-де Вриза-Бюргерса со знакопеременным коэффициентом. I. // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2007. - №4(7). - С.185-198.
2. *Подгаев А. Г.* Краевая задача для уравнения Кортвега-де Вриза-Бюргерса со знакопеременным коэффициентом. II. // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2008. - №4. - С.9-20.
3. *Подгаев А. Г.* Компактность некоторых нелинейных множеств // Доклады АН СССР. 1985. Т.285, №5. С.1064-1066.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. -М.: Мир, 1972. - 587 с.
5. *Lions J.-L.* Quelques methodes de resolution les problemes aux limites non linearies. Paris, 1969.
6. *Дубинский Ю.А.* Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях, Матем. сб. 67(109), (1965). 609-642.