УДК 536.46



# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ (ДИНАМИЧЕСКИХ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК) НЕСЖИМАЕМОЙ, ВЯЗКОЙ, ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

*Булгаков В. К.* – д.-р. физ.-мат. наук, проф. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», тел.: (4212) 37-52-03 (ТОГУ); *Пассар А. В.* – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, тел. 8-914-204-30-58, e-mail: passar_av@mail.ru; *Ершов Н. Е.* – канд. физ.-мат. наук, зам. директора, тел. (4212) 22-73-09 (ВЦ ДВО РАН)

В рамках гидродинамического подхода дана математическая модель внутренних течений вязкой теплопроводной, несжимаемой жидкости. В неравновесном термодинамическом приближении излагаются динамические и энергетические процессы в жидкости.

Within the limits of the hydrodynamic approach the mathematical model of internal currents of viscous, incompressible, thermal conductivity fluid is developed. In nonequilibrium thermodynamic approach dynamic and power processes in a liquid are given.

*Ключевые слова:* математическая модель течения, динамические и энергетические процессы в гидродинамическом, квазиравновесном приближении, совершенный газ.

## Введение

Рассмотрим внутреннее течение в области $\Omega \cup \tilde{A} = \overline{\Omega}$, где $\Omega$ - открытое связанное множество с достаточно гладкой границей $\tilde{A}$. Введем в $\overline{\Omega}$ физическое пространство $R^3$ заполненное несжимаемой жидкостью. Физическое пространство $R^3$ вещественных координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ имеет метрику, индуцированную метрикой трехмерного вещественного евклидова пространства $E^3$ [1]. Будем считать, что в физическом пространстве $R^3$ можно ввести единую декартову систему координат.

Для однородной несжимаемой жидкости можно считать, что плотность жидкости $\rho = const$, $R^3 \times R_t$, где $R_t = \left[0, T\right]$. Используя соотношение Гиббса-Дюгема на случай неравновесной жидкости:

$$\frac{dE}{dt} = T\frac{dS}{dt} - P\frac{dV}{dt}. \tag{1.1}$$

Для несжимаемой жидкости получаем

$$dE = TdS, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = T\frac{\partial S}{\partial t}, \quad \nabla E = T\nabla S. \tag{1.2-1.4}$$

Если при процессе объем тела остается постоянным, то есть количество получаемого телом тепла равно изменению его энергии $dQ = dE$, то очевидно $dQ = d\left(E + \rho V\right)$, учитывая, что $w = \left(E + \rho V\right)$ - энтальпия (теплосодержащая функция), следовательно $dQ = dw$.

**Уравнения движения**

В рамках гидродинамического подхода уравнения движения вязкой теплопроводной жидкости в декартовой прямоугольной системе координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ при использовании элементов тензорного и векторного анализа можно записать в виде [1,2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho u_k\right) = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho u_i u_k + P\delta_{ik}\right) = \frac{\partial \sigma_{ik}^{(\nu)}}{\partial x_k}. \tag{2.2}$$

Здесь $P$ - гидростатическое давление, $\delta_{ik}$ - символ Кронекера, $\sigma_{ik}^{\nu}$ - тензор вязких напряжений.

Для несжимаемой жидкости $\rho = const$, тензор вязких напряжений $\sigma_{ik}^{\nu}$ равен

$$\sigma_{ik}^{(\nu)} = \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \tag{2.3}$$

уравнение неразрывности (2.1)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \tag{2.4}$$

Используя (2.3, 2.4) и $\nabla\cdot\left(\varphi\vec{f}\right)=\vec{f}\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla\cdot\vec{f}$ получаем уравнение движения несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности [2]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}-\nu\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_k}=0\\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}=0\end{cases}\tag{2.5}$$

Здесь $\nu=\dfrac{\eta}{\rho}$ - кинематическая вязкость.

**Уравнение для энергетических характеристик**

Для несжимаемой жидкости закон сохранения полной энергии (кинетической плюс внутренней) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2}+\rho E\right)+\nabla\cdot\left[\vec{u}\left(\rho\frac{u^2}{2}+\rho E+P\right)\right]-\\ -\nabla\cdot\left(\vec{u}\vec{\sigma}^{(\nu)}\right)-\nabla\cdot\left(\frac{\eta c_p}{Pr}\nabla T\right)=0\end{gathered}\tag{3.1}$$

или

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2}+\rho E\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k\left(\rho\frac{u^2}{2}+\rho E+P\right)\right]-\\ -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i\sigma_{ik}^{(\nu)}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\eta c_p}{Pr}\frac{\partial T}{\partial x_k}=0\end{gathered}\tag{3.2}$$

Рассмотрим $\dfrac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(\vec{u}\vec{\sigma}^{(\nu)}\right)=\nu\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[u_i\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}+\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]$, проведя ряд преобразований получаем

$$\begin{gathered}\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]=\nu\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right)+\frac{\nu}{2}\vec{\Delta}\cdot\vec{a}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_1u_2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_1u_3}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 u_2u_3}{\partial x_2\partial x_3}\right)-\\ -\nu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right).\end{gathered}$$

Используя соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[u_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[u_3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right]=$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + u_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \\
&+2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + u_1\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + u_3\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \\
&+2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + u_3\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3},
\end{aligned}
$$

приходим к

$$
\begin{aligned}
&\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right] = \nu\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{\nu}{2}\vec{\Delta}\cdot\vec{a} + 2\nu\left(\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}+\frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}\right) - \\
&-\nu\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left[u_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[u_3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right]\right].
\end{aligned}
$$

Продолжим, воспользовавшись уравнением неразрывности

$$
\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right] = \nu\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) + \nu\vec{\Delta}\cdot\vec{a} + 2\nu\left(\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}+\frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}\right).
$$

Окончательно получим уравнение сохранения полной энергии несжимаемой жидкости

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}+E\right) + \nabla\left[\vec{u}\cdot\left(\frac{u^2}{2}+E+\frac{p}{\rho}\right)\right] - \nu\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) - \nu\vec{\Delta}\cdot\vec{a} - \\
&-2\nu\left(\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}+\frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}\right) - \frac{\nu c_p}{Pr}\Delta T = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

В работе [4], используя уравнение сохранения импульса [5], получено уравнение переноса кинетической энергии

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k\left(\rho\frac{u^2}{2}+P\right)\right] - P\frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}^{(\nu)}u_i\right) + \sigma_{ik}^{(\nu)}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0 . \tag{3.4}
$$

Входящий в уравнения переноса кинетической энергии член $\sigma_{ik}^{(\nu)}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}$ описывает диссипацию кинетической энергии в тепло благодаря вязкости.

Диссипативный член для несжимаемой жидкости может быть записан в виде

$$
\sigma_{ik}^{(\nu)}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).
$$

Вычисление в правой части приводит к формуле

$$\sigma_{ik}^{(\nu)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \eta\Phi ,$$

где $\Phi$ - диссипативная функция [6,7], для несжимаемой жидкости равная

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2 .$$

Тогда уравнение переноса кинетической энергии можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right) + u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho} u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} - \nu\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) - \nu\vec{\Delta}\cdot\vec{a} - \\ -2\nu\left(\frac{\partial^2 u_1 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}\right) + \nu\Phi \quad . \tag{3.5}$$

Вычитая из закона сохранения полной энергии (3.3) уравнение переноса кинетической энергии (3.5), получим уравнение переноса внутренней энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla E - \frac{\nu c_p}{Pr}\Delta T - \nu\Phi = 0 . \tag{3.6}$$

Рассмотрим удельную внутреннюю энергию (единицы массы) $E$ . Пусть единице массы соответствует удельный объем $V$ , тогда $dE = TdS - pdV$ . Если $E = E(S,V)$, то $dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S dV$ следовательно

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V , \; P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_V .$$

Из определения теплоемкостей имеем

$$c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V , \; c_P = \left(\frac{\partial w}{\partial T}\right)_P .$$

Используя вышеприведенные соотношения получаем

$$\frac{\partial E}{\partial T} = T\frac{\partial S}{\partial t} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \frac{\partial T}{\partial t} = c_P \frac{\partial T}{\partial t} , \tag{3.7}$$

$$\nabla E = T\nabla S = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \nabla T = c_P \nabla T . \tag{3.8}$$

Подставляя (3.7, 3.8) в уравнение переноса внутренней энергии (3.6) получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla T - \frac{\nu}{Pr}\Delta T - \frac{\nu}{c_p}\Phi = 0 . \tag{3.9}$$

Знание закономерностей изменения энтропии в потоке необходимо как составная анализа физических процессов происходящих при течении. Исходя из уравнений переноса внутренней энергии (3.6) и используя термодинамические соотношения Гиббса (1.4) получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla S = \frac{\nu c_p}{Pr} \frac{1}{T} \Delta T + \frac{\nu}{T} \Phi \; . \qquad (3.10)$$

Таким образом, авторами разработана полная математическая модель течения несжимаемого, вязкого, теплопроводного газа, для которого предстоит разработать алгоритм расчета и реализовать его на ЭВМ. В результате авторы планируют провести количественный анализ сложных физических процессов, заложенных в модели.

## Библиографические ссылки

1. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – 4-е изд., испр. – СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. – 816 с.: ил.
2. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика в 10 т. Т. VI Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М., Наука, 1988.
3. *Зубарев Д.Н.* Статистическая механика неравновесных процессов / Д.Н. Зубарев, В.Г. Морозов, Г. Рёпке. В 2-х т. Т. 2. – М.: Физико-математическая литература, 2002. – 296 с., ил.
4. *Булгаков В.К.* Математическое моделирование течения сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа / В.К. Булгаков, А.В. Пассар // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2009. - № 2(13). – С. 13-24.
5. *Левич В.Г.* Курс теоретической физики Т. II / В.Г. Левич, Ю.А. Вдовин, В.А. Мямлин. М., 1971. – 936 с., ил.
6. *Бекнев В.С.* Газовая динамика. Механика жидкости и газа / В.С. Бекнев, В.М. Епифанов, А.И. Леонтьев и др.; Под общей ред. А.И. Леонтьева. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 671 с., ил.
7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с., ил.