УДК 338:001.891.573

МОДЕЛЬ РЕГИОНАЛЬНОЙ МАКРОЭКОНОМИКИ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПРИ ВВОДЕ ФОНДОВ*

Мухин Г. А. – асп. кафедры «Прикладная математика» (ДВГУПС);
Булгаков В. К. – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ТОГУ)

В статье предлагается математическая модель региональной макроэкономики с учетом запаздывания при вводе фондов; на основе производственной В-функции исследована стационарная траектория модели. Найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности стационарной траектории. Исследован выход модели на стационарный режим.

The article describes the mathematical model of regional macroeconomics taking into account tardiness of funds introduction on a basis of the production B-function. The stationary trajectory of the model has been researched. The necessary and sufficient conditions of existence and unicity of the stationary trajectory have been found. The model coming out to the stationary regime has been studied.

Ключевые слова: математическая модель, запаздывание, производственная В-функция

1. Об инвестициях и потреблении в региональной макроэкономике РФ

Пусть K – основной капитал (фонды), N – число работников, участвующих в производственном процессе экономической системы региона. Введем переменные (аргументы) производственного процесса μK, gN, где μ – доля выбывших за год основных производственных фондов, g – средний годовой доход одного работника. Пусть Y – валовой региональный продукт (ВРП), измеряемый в стоимостном исчислении.

Автор благодарит проф. В. К. Булгакова за оказание помощи при постановке задачи.

Введя безразмерные параметры (переменные) $A = \dfrac{\mu K}{g N}$, $C = \dfrac{Y}{g N}$, предложенную в работе [1] производственную B-функцию можно записать в виде

$$\frac{C}{C_\infty} = b\left(1 - e^{-BA}\right) + (1-b)BA\left(1 - e^{-\frac{1}{BA}}\right), \tag{1}$$

где B, b, C_∞ – параметры производственной B-функции. В [1] приведены с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$ следующие значения параметров производственной функции экономики Хабаровского края: $B = 0{,}829$, $b = 0{,}858$, $C_\infty = 12{,}091$. В переменных $x_1 = \mu K$, $x_2 = g N$, Y производственная B-функция имеет вид

$$Y = 10.374 x_2\left(1 - e^{-0.829\frac{x_1}{x_2}}\right) + 1.423 x_1\left(1 - e^{-1.206\frac{x_2}{x_1}}\right). \tag{2}$$

Введя нормирующие множители $\dfrac{1}{B}$, C_∞ для переменных A и C, т. е. $x = BA$, $B(x) = \dfrac{C}{C_\infty}$, производственную функцию (1) представим в виде

$$B(x) = b\left(1 - e^{-x}\right) + (1-b)x\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right). \tag{3}$$

Абсолютный показатель Y следующим образом выражается через функцию (3):

$$Y = g N C_\infty B(x). \tag{4}$$

С точки зрения математического моделирования экономическая система региона отличается от экономической системы страны тем, что математическую модель макроэкономики региона нельзя рассматривать как замкнутую, когда инвестиции и потребление полностью определяются объемом произведенной продукции. Валовой региональный продукт за вычетом полного объема налоговых изъятий с рассматриваемой территории определяет только часть региональных инвестиций и потребления. Необходимо рассматривать процесс воспроизводства основного капитала региона также с учетом капитальных расходов бюджетов всех уровней (федерального, регионального, муниципальных бюджетов региона), финансовых потоков естественных монополий на территории (отраслевое финансирование) и финансирования из других источников. Рассмотрим модель суммарного финансирования капитальных расходов региона бюджетной системой Российской Федерации, естественными монополиями на территории и из других источников. За основу модели возьмем схему бюджетной системы РФ, рассмотренную в [2].

Пусть Q – полный объем налоговых изъятий с рассматриваемой территории, а Q_F, Q_R, Q_M – налоги, поступающие в федеральный, региональный и муниципальные бюджеты региона. Введем $\rho_1 = \dfrac{Q_F}{Q}$, $\rho_2 = \dfrac{Q_R}{Q}$, $\rho_3 = \dfrac{Q_M}{Q}$ и пропорции ν_1, ν_2 возврата средств в порядке перераспределения доходов в долях от уровня доходов нижестоящих бюджетов, рассчитанные как увеличивающие коэффициенты.

Поступления в региональный и местные бюджеты от естественных монополий на территории по аналогии с бюджетным регулированием выразим через пропорции ν_R^{ind}, ν_M^{ind}, поступления из других источников (внебюджетной системы РФ и внеотраслевого финансирования) – через пропорции ν_R^0, ν_M^0 в долях от уровня налоговых поступлений регионального и местных бюджетов.

Введя параметры δ – уровень налогового бремени региона ($\delta = Q/Y$), s – норму накопления, определяемую организаторами производственного процесса региона, для суммарных инвестиций I и фонда непроизводственного потребления W можем записать:

$$I = c_i\, Y = c_i\, g\, N\, C_\infty\, B(x)\,, \qquad (5)$$

$$W = c_w\, Y = c_w\, g\, N\, C_\infty\, B(x)\,, \qquad (6)$$

где функция $B(x)$ определяется уравнением (3), а коэффициенты c_i, c_w равны:

$$\left.\begin{aligned} c_i &= (1-\delta)\, s + r_i\,, \\ c_w &= (1-\delta)\,(1-s) + r_w\,, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

где
$$\begin{aligned} r_i = \{ S_R \big[\big(1+\nu_1+\nu_R^{ind}+\nu_R^0\big)\rho_2 - \nu_2\,\rho_3 \big] + \\ + S_M \big(1+\nu_2+\nu_M^{ind}+\nu_M^0\big)\rho_3 \}\,\delta\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_w = \{ (1-S_R) \big[\big(1+\nu_1+\nu_R^{ind}+\nu_R^0\big)\rho_2 - \nu_2\,\rho_3 \big] + \\ + (1-S_M)\big(1+\nu_2+\nu_M^{ind}+\nu_M^0\big)\rho_3 \}\,\delta\,. \end{aligned}$$

Как нетрудно убедиться, коэффициенты c_i, c_w удовлетворяют уравнению

$$c_i + c_w = q\,, \qquad (8)$$

где $q = (1-\delta) + \left\{ \left(1+\nu_1+\nu_R^{ind}+\nu_R^0\right)\rho_2 + \left(1+\nu_2+\nu_M^{ind}+\nu_M^0\right)\rho_3 \right\} \delta$. Анализ показывает, что $q \approx 1$.

2. Учет запаздывания при вводе фондов

В реальной экономике капитальные вложения в основные фонды (основной капитал) всегда осваиваются с некоторым запаздыванием. Предполагаем, что инвестиции, сделанные в момент времени τ в объеме $I(\tau)$, т.е. за год $[\tau-1, \tau]$ будут осваиваться постепенно, долями, согласно некоторому закону распределения $N(t,\tau) > 0$, причем $\int\limits_{\tau}^{\infty} N(t,\tau)\, dt = 1$. Поскольку инвестиции делаются не только в какой-то фиксированный момент времени, но могут иметь место в любой момент τ, то ко времени t накопится следующий объем вводимых фондов $V(t)$:

$$V(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} N(t,\tau)\, I(\tau)\, d\tau, \qquad [V] = \left[\frac{руб}{t}\right],$$

где инвестиции и функция распределения имеют размерность

$$[I] = \left[\frac{руб}{t}\right], \qquad [N] = \left[\frac{1}{t}\right].$$

Предположим, что процесс инвестирования и ввода фондов происходит постоянно, а распределение $N(t-\tau)$ имеет экспоненциальный характер:

$$N(t-\tau) = A\, e^{-\kappa(t-\tau)}. \tag{9}$$

Из условия нормировки $\int\limits_{\tau}^{\infty} N(t-\tau)\, dt = 1$ получаем: $A = \kappa$, а

$$V(t) = \kappa \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\kappa(t-\tau)}\, I(\tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Дифференцированием (10) по параметру t нетрудно получить уравнение динамики ввода фондов с учетом инвестиций и запаздывания при вводе фондов в виде [3]:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \kappa I(t) - \kappa V(t). \tag{11}$$

3. Модель региональной макроэкономики с учетом запаздывания при вводе фондов

Рассмотрим математическую модель макроэкономики региона в следующих относительных безразмерных показателях (агрегированных переменных):

$$x = B\,\frac{\mu K}{g\,N}\,, \quad \upsilon = \frac{V}{g\,N}\,, \quad i = \frac{I}{g\,N}\,, \quad w = \frac{W}{g\,N}\,, \quad y = \frac{Y}{g\,N}\,. \tag{12}$$

x, υ – фазовые (основные) переменные (при $g = const$ x пропорциональна фондовооруженности); экономический смысл переменных i, w, y следует из (12).

Примем следующие допущения.

1. Производственный процесс региона описывается функцией (3).
2. Динамика основных фондов региона описывается уравнением

$$\frac{dK}{dt} = V - \mu K\,. \tag{13}$$

Уравнение (13) выражает тот факт, что изменение основных фондов в единицу времени определяется их износом в единицу времени в производственном процессе и вводимыми фондами V в единицу времени.

3. Изменение численности работников в единицу времени, участвующих в производственном процессе региона, определяется уравнением

$$\frac{1}{N}\,\frac{dN}{dt} = \nu\,, \tag{14}$$

где ν – постоянная, определяющая годовой темп прироста численности работников за счет демографических процессов.

4. Изменение среднегодового дохода одного работника в единицу времени определяется уравнением

$$\frac{1}{g}\,\frac{dg}{dt} = \tau\,, \tag{15}$$

где τ – постоянная модели, определяющая годовой темп прироста среднегодового дохода одного работника.

Продифференцировав соотношение $x = B\,\dfrac{\mu K}{g\,N}$ по времени, получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{K}\frac{dK}{dt} - \frac{x}{N}\frac{dN}{dt} - \frac{x}{g}\frac{dg}{dt}\,. \tag{16}$$

Учитывая (12), (13), (14), (15), уравнение динамики фазовой переменной x можно представить в виде [4]

$$\frac{dx}{dt} = \mu B\upsilon - \lambda x\,, \tag{17}$$

где $\lambda = \mu + \nu + \tau$, $x \in C^{(\infty)}[0,\infty)$, в силу свойств функции $B(x)$, $t \in R_+ = \{\, t : 0 \le t < \infty \,\}$. Начальное условие уравнения (17) имеет вид

$$x(0) = x_0 = B\,\frac{\mu\, K(0)}{g(0)\, N(0)} \in (0,\infty). \qquad (18)$$

Запишем уравнение динамики ввода фондов (11) в относительной переменной $\upsilon = \dfrac{V}{g\,N}$. Дифференцируя по времени соотношение $V = g\,N\,\upsilon$ и используя уравнения (14), (15), а также выражение для инвестиций (5), можно записать уравнение ввода фондов в форме

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \kappa\, c_i\, C_\infty\, B(x) - \chi\,\upsilon, \qquad (19)$$

где $\chi = \kappa + \nu + \tau$, $\upsilon \in C^{(\infty)}[0,\infty)$, $t \in R_+ = \{\, t : 0 \le t < \infty \,\}$. Начальное условие уравнения (19) имеет вид

$$\upsilon(0) = \upsilon_0 = \frac{V(0)}{g(0)\, N(0)} \in (0,\infty). \qquad (20)$$

Таким образом, приходим к следующей математической модели региональной макроэкономики с учетом запаздывания при вводе фондов в относительных переменных (x, υ, i – удельные инвестиции, w – среднедушевое потребление, y – удельный объем производства) [4]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \mu\, B\,\upsilon - \lambda\, x, && x(0) = x_0,\\
&\frac{d\upsilon}{dt} = \kappa\, c_i\, C_\infty\, B(x) - \chi\,\upsilon, && \upsilon(0) = \upsilon_0,\\
&i = c_i\, C_\infty\, B(x), \quad w = c_w\, C_\infty\, B(x), \quad y = C_\infty\, B(x), &&\\
&B(x) = b\left(1 - e^{-x}\right) + (1-b)\,x\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right), &&\\
&c_i = (1-\delta)\, s + r_i, \qquad c_w = (1-\delta)\,(1-s) + r_w. &&
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Переменные $x(t)$, $\upsilon(t)$ (фазовые, основные) как решение задачи Коши (17), (19), (18), (20) изменяются во времени, описывая динамику развития региональной экономической системы. Очевидно, что остальные макроэкономические переменные также являются функциями времени: $i = c_i\, C_\infty\, B(x(t))$, $w = c_w\, C_\infty\, B(x(t))$, $y = C_\infty\, B(x(t))$. В рассматриваемой модели вся динамика определяется задачей Коши (17), (19), (18), (20) для переменных $x(t)$, $\upsilon(t)$ (поэтому они названы основными).

Исследуем стационарную траекторию модели (21), т. е. $x = x_s = const$, $\upsilon = \upsilon_s = const$, $i = i_s = const$, $w = w_s = const$, $y = y_s = const$. В этом случае предметом исследования будет следующая система двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu B \upsilon - \lambda x, \\ \frac{d\upsilon}{dt} &= \kappa\, c_i\, C_\infty\, B(x) - \chi \upsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Вопрос о существовании и единственности стационарной траектории модели решает следующая теорема [5].

Теорема 1. Пусть λ, $\chi > 0$ и имеет место неравенство

$$\mu B \kappa c_i C_\infty > \lambda \chi, \qquad (23)$$

тогда система (23) имеет единственную стационарную нетривиальную траекторию: $x_s > 0$, $\upsilon_s > 0$.

Доказательство. Стационарная точка (x_s, υ_s) дифференциальных уравнений (22) определяется системой двух алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\mu B \upsilon - \lambda x = 0, \\ &\kappa\, c_i\, C_\infty\, B(x) - \chi \upsilon = 0. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя υ из первого уравнения во второе, получаем

$$B(x) - \varphi(x) = 0,$$

где $\varphi(x) = \gamma x$, $\gamma = \dfrac{\lambda \chi}{\mu B \kappa c_i C_\infty}$.

Функция $B(x)$ непрерывная, положительная, дифференцируемая, строго возрастающая на R_+ ($B(x) > 0$, $B'(x) > 0$ $\forall x \in R_+$), причем $B(0) = 0$, $B'(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} B(x) = 1$. Прямая $\varphi(x)$: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \gamma$, $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$. Так как $B(x)$, $\varphi(x)$ выходят из одной точки $x = 0$ с наклонами $B'(0) = 1$ и γ, то при $\gamma < 1$ в силу непрерывности функций существует промежуток $[0, \delta) \subset R_+$, где δ – некоторое положительное число, на котором $\varphi(x) < B(x)$. Тогда в силу того, что функции $B(x)$, $\varphi(x)$ строго возрастающие, причем $\lim\limits_{x \to \infty} B(x) = 1$, а $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$, существует единственная точка $\omega > 0$, в которой $B(\omega) = \varphi(\omega)$. Точка ω и есть стационарная точка x_s: $x_s = \omega$. Заметим, что стационарное значение второй переменной $\upsilon_s = \dfrac{\lambda\, x_s}{\mu B}$. Учитывая, что $\gamma = \dfrac{\lambda\chi}{\mu B \kappa c_i C_\infty}$, получаем (23)

Следует отметить, что в силу отмеченных свойств В-функции, неравенство (25) является необходимым и достаточным условием.

Используя первое уравнение системы (7), распишем неравенство (23) относительно нормы накопления s, формируемой организаторами регионального производственного процесса, в виде

$$s > \frac{1}{1-\delta}\left\{\frac{\left[1+(\nu+\tau)\mu^{-1}\right]\cdot\left[1+(\nu+\tau)\kappa^{-1}\right]}{B\,C_\infty} - r_i\right\}. \tag{24}$$

Из (24) следует, что увеличение годового темпа прироста численности работников, участвующих в производственном процессе ν, увеличение годового темпа прироста среднегодового дохода работника τ, увеличение налогового бремени δ, уменьшение коэффициента износа основного капитала μ, увеличение времени запаздывания при вводе фондов (уменьшение κ) приводит к увеличению предельно допустимой нижней границы нормы накопления s. Неравенство (24) имеет большое значение. Параметры рассматриваемой региональной макроэкономической системы и предельно допустимая нижняя граница нормы накопления s должны удовлетворять неравенству (24). В противном случае экономическая система не имеет стационарную нетривиальную траекторию. Неравенство (24) является необходимым условием выхода экономики на стационарную траекторию.

Если рассмотреть экономическую систему, имеющую параметры: $B = 0{,}829$, $b = 0{,}858$, $C_\infty = 12{,}091$, $\delta = 0{,}18$, $r_i = 0{,}0198$, $r_w = 0{,}1402$, $q = 0{,}98$, $\nu = -0{,}0045$, $\mu = 0{,}07$, то для $\tau = 0{,}1$, $\kappa = 7$ получаем

$$s > 0{,}2674,$$

а для $\tau = 0{,}05$, $\kappa = 14$ вычисления приводят к неравенству

$$s > 0{,}1773.$$

При численном решении уравнения

$$\psi(x) \equiv B(x) - \gamma x = 0 \tag{25}$$

для определения величины x_s на основе метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\psi(x_n)}{\psi'(x_n)} \tag{26}$$

необходимо задать начальное приближение x_0, находящееся в области притяжения корня, тогда метод Ньютона сходится (как геометриче-

ская прогрессия). Однако если точка x_0 не находится в области притяжения корня, то метод расходится.
Используя свойства производственной B-функции, докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если для решения уравнения (25), определяющего стационарную траекторию модели, использовать метод Ньютона (26) и взять начальное приближение

$$x_0 = \gamma^{-1}, \tag{27}$$

то итерационный процесс Ньютона дает монотонно убывающую последовательность $\{x_n\} \to x_s$.

Доказательство. Действительно, в точке $x = \frac{1}{\gamma}$ функция

$$\psi\left(\frac{1}{\gamma}\right) = B\left(\frac{1}{\gamma}\right) - 1 < 0\,, \tag{28}$$

т.е. точка находится справа от корня x_s. Вторая производная функции $\psi(x)$ на отрезке $l_\gamma = \left[x_s, \frac{1}{\gamma}\right]$

$$\psi''(x) < 0\,, \tag{29}$$

так как $B''(x) < 0$ для $x \in (0, \infty)$. Как известно [6], неравенства (30), (31) гарантируют, что итерационный процесс Ньютона дает монотонно убывающую последовательность $\{x_n\} \to x_s$

Таблица 1

j	s	x_0	x_s	υ_s	$B(x_s)$	$\widehat{x}$	$\widehat{\upsilon}$
1	0,20	1,1129	0,2501	0,4977	0,2247	0,1253	0,2494
2	0,25	1,3612	0,6721	1,3377	0,4938	0,3256	0,6481
3	0,30	1,6095	1,0392	2,0684	0,6457	0,4758	0,9469
4	0,35	1,8577	1,3811	2,7488	0,7434	0,6052	1,2045
5	0,40	2,1060	1,7046	3,3927	0,8094	0,7204	1,4338
6	0,45	2,3542	2,0138	4,0082	0,8554	0,8245	1,6410
7	0,50	2,6025	2,3117	4,6010	0,8883	0,9194	1,8298
8	0,55	2,8508	2,6004	5,1757	0,9122	1,0065	2,0033
9	0,60	3,0990	2,8818	5,7358	0,9299	1,0870	2,1635
10	0,65	3,3473	3,1572	6,2839	0,9432	1,1618	2,3124
11	0,70	3,5955	3,4277	6,8222	0,9533	1,2317	2,4515
12	0,75	3,8438	3,6941	7,3526	0,9611	1,2972	2,5819
13	0,80	4,0921	3,9573	7,8765	0,9671	1,3588	2,7046

В табл. 1 приведены результаты расчетов стационарных точек (x_s, υ_s) для региональной экономической системы, параметры которой были приведены выше для случая $\tau = 0{,}05$, $\kappa = 14$ и $s \in [0{,}2,\ 0{,}8]$. При выборе нижней границы нормы накопления s учитывалось необходимое условие (24). При расчете x_s использовался итерационный метод Ньютона, начальное приближение выбиралось по формуле (27). Напомним, что

$$\upsilon_s = \frac{\lambda\, x_s}{\mu\, B}. \tag{30}$$

Для каждого значения s, при котором существуют стационарные нетривиальные значения фазовых переменных x_s, υ_s на фазовой плоскости x, υ, точнее в ее положительном ортанте, имеется особая точка (x_s, υ_s) – точка стационарности региональной макроэкономики с учетом запаздывания при вводе фондов.

Проведем исследование устойчивости стационарного решения системы (22). Используя замену

$$y = x - x_s, \qquad z = \upsilon - \upsilon_s,$$

запишем систему (22) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\lambda\, y + \mu\, B\, z, \\ \frac{dz}{dt} &= \kappa\, c_i\, C_\infty \left(B(y + x_s) - B(x_s)\right) - \chi\, z, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

стационарное решение которой $y, z \equiv 0$ ($x = x_s$, $\upsilon = \upsilon_s$). Исследование устойчивости стационарного решения системы (22) сводится к анализу устойчивости тривиального решения [7] системы (31).

Теорема 3. Если выполняются условия теоремы 1, то точка покоя $y, z \equiv 0$ системы (31) устойчива в целом.

Доказательство. Перепишем систему (31) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\lambda\, y + \mu\, B\, z, \\ \frac{dz}{dt} &= \kappa\, c_i\, C_\infty\, B(y + x_s) - \frac{\lambda\, \chi}{\mu\, B} x_s - \chi\, z. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Для доказательства теоремы воспользуемся примером Н. Н. Красовского в изложении Е. А. Барбашина [8, с. 51-52]. Построим функцию Ляпунова для системы (32) в виде

$$\Lambda = (\chi\, y + \mu\, B\, z)^2 +$$
$$+ 2\,\mu\, B\, \kappa\, c_i\, C_\infty \int_0^y \left[p\,(y + x_s) - B(y + x_s) \right] dy.$$

Ее производную запишем в виде

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -2\,\mu\, B\, \kappa\, c_i\, C_\infty\, (\lambda + \chi)\, \left[p\,(y + x_s) - B(y + x_s) \right] y\,.$$

В силу теоремы об асимптотической устойчивости в целом (см. [8]) достаточные условия устойчивости задачи (33) имеют вид:

$$\begin{aligned}
&a)\ \ 2\,\mu\, B\kappa c_i\, C_\infty\, \left[p\,(y + x_s) - B(y + x_s) \right] y > 0 \quad при \quad y \neq 0\,, \\
&b)\ \ \lambda + \chi > 0 \quad при \quad y \neq 0\,, \\
&c)\ \ 2\,\mu\, B\kappa\, c_i\, C_\infty \int_0^y \left[p\,(y + x_s) - B(y + x_s) \right] dy \to \infty \quad при \quad |\,y\,| \to \infty\,.
\end{aligned} \tag{33}$$

Покажем, что эти условия выполняются.

Условие *a)*. Из рис. 1 видно, что $p\,(y + x_s) - B(y + x_s)$ положительно при $y > 0$ и отрицательно при $y < 0$. Величина $2\,\mu\, B\, \kappa\, c_i\, C_\infty$ положительна по смыслу входящих в нее констант. Следовательно, условие *a)* выполняется.

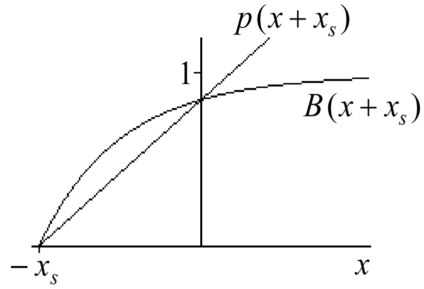

Рис. 1. К обоснованию условия устойчивости *a)*

Условие *b)* выполняется, так как $\lambda > 0$ и $\chi > 0$ (в силу условий теоремы 1).

Условие *c)* выполняется, так как $\lim\limits_{y \to \infty} p\,(y + x_s) = \infty$, $\lim\limits_{y \to \infty} B\,(y + x_s) = 1$ и $2\,\mu\, B\, \kappa\, c_i\, C_\infty > 0$.

Таким образом, все условия (33) выполняются, следовательно, теорема об асимптотической устойчивости в целом имеет место, и точка покоя системы (31) является асимптотически устойчивой в целом.

В силу теоремы 3, точка покоя системы (31) асимптотически устойчива в целом (т. е. устойчива при любых начальных возмущениях), следовательно, асимптотически устойчива в целом и стационарная траектория исходной системы (22). На рис. 2 приведены траектории системы (22) в окрестности стационарной точки при различных нормах накопления. Система рассчитывалась методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности.

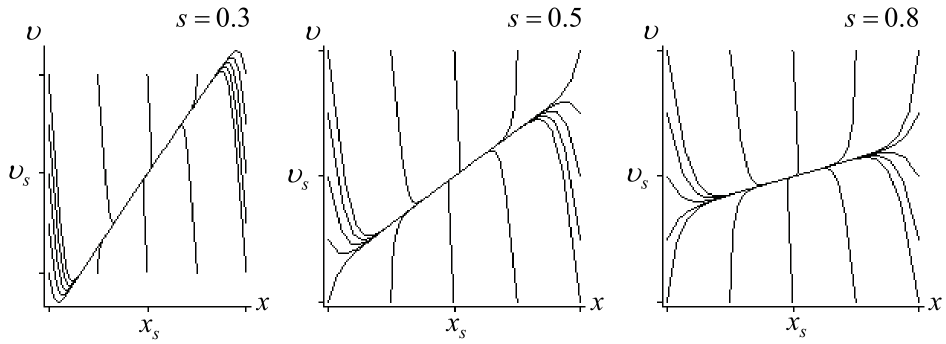

Рис. 2. Траектории системы (22) в окрестности стационарной точки (x_s, υ_s) при различных нормах накопления

4. Выход модели на стационарный режим

Если начальные условия таковы, что $x_0 \neq x_s$ и $\upsilon_0 \neq \upsilon_s$, то в макроэкономике региона будет наблюдаться нестационарный процесс выхода на режим, определяемый задачей (17), (19), (18), (20).

Представляет интерес исследование характера переходного процесса в зависимости от начальных условий и значений параметров модели μB, $\kappa\, c_i\, C_\infty$, λ, χ. При варьировании нормы накопления s изменению подвержен параметр $\kappa\, c_i\, C_\infty$ как линейная возрастающая функция. Так, при $0{,}2 < s < 0{,}8$ $31{,}113 < \kappa\, c_i\, C_\infty < 114{,}395$.

В качестве примера рассмотрим решение задачи Коши (17), (19), (18), (20) для региональной экономической системы, параметры которой были даны выше. Задача Коши решалась численно на ЭВМ методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности с шагом $\Delta t = 0{,}01$ года.

Рассмотрим некоторые результаты расчетов переходных процессов модели макроэкономики региона. При анализе переходных процессов показательной величиной является $\widehat{x}$, которая соответствует максимуму функции $B(x) - \varphi(x)$ по фазовой переменной x, т. е. условию

$$\psi(x) = B'(x) - \gamma = 0\,, \tag{34}$$

где $0 < \gamma < 1$. Функция $B'(x)$ положительная, строго монотонная убывающая на промежутке $[0, \infty)$ от 1 до 0, поэтому уравнение (34) имеет единственное нетривиальное решение. Так как при этом

$-1 < B''(x) < 0$, то для итерационного метода Ньютона точка $x_0 = 0$, находится в области притяжения корня $\widehat{x}$. Уравнение (34) решалось численно методом Ньютона, начальное приближение бралось $x_0 = 0$, что обеспечивало монотонно возрастающую последовательность $\{x_n\} \to \widehat{x}$. Результаты расчетов приведены выше в табл. 1.

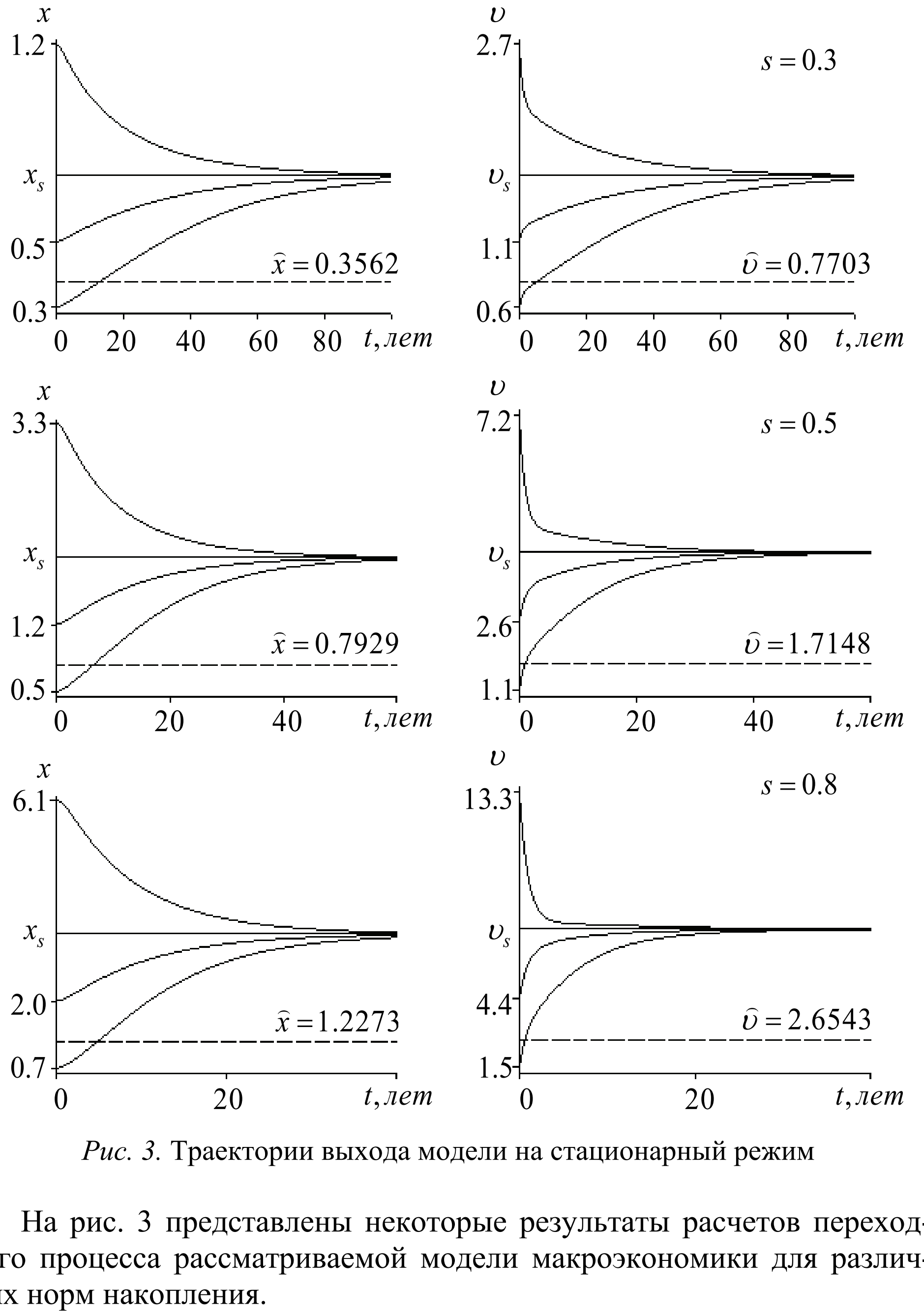

Рис. 3. Траектории выхода модели на стационарный режим

На рис. 3 представлены некоторые результаты расчетов переходного процесса рассматриваемой модели макроэкономики для различных норм накопления.

При любом начальном состоянии макроэкономической модели (21), определяемом начальными значениями фазовых переменных $x_0, \upsilon_0 \in (0,\infty)$, $x_0 \neq x_s$, $\upsilon_0 \neq \upsilon_s$, при $\gamma < 1$, решение задачи Коши $x(t) \to x_s$, $\upsilon(t) \to \upsilon_s$, при $t \to \infty$, не пересекая прямые $x(t) = x_s$, $\upsilon(t) = \upsilon_s$, определяющие стационарные траектории сбалансированного роста $x_s, \upsilon_s, i_s, w_s, y_s$. Причем, достижение h-окрестности стационарных значений, где $h > 0$ сколь угодно малая величина, происходит за конечное время T_1, а для перехода от состояний $[x_s - h]$, $[x_s + h]$, $[\upsilon_s - h]$, $[\upsilon_s + h]$ до x_s, υ_s, соответственно требуется время $T_2 \to \infty$. Само решение уравнений (25), (30), определяющих x_s, υ_s, можно осуществить с некоторой погрешностью ε_{comp}, поэтому практически стационарное состояние экономической системы надо представлять как некоторую окрестность точки x_s, υ_s: $[x_s - h,\ x_s + h]$, $[\upsilon_s - h,\ \upsilon_s + h]$, где h – малая, но конечная величина.

Библиографические ссылки

1. *Булгаков В. К., Булгаков О. В.* Моделирование динамики обобщающих показателей развития региональных экономических систем России // Экономика и математические методы. 2006. Т. 42. № 1.
2. *Булгаков В. К., Стригунов В. В.* Модель и исследование макроэкономики региона на основе производственной B-функции // Вестник Тихоокеанского государственного университета. 2005. № 1.
3. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. М., 1998.
4. *Булгаков В. К., Мухин Г. А.* Модель региональной макроэкономики с учетом запаздывания при вводе фондов // Научно-технические проблемы транспорта, промышленности и образования. 2006. Т. 1.
5. *Мухин Г. А.* Исследование модели региональной макроэкономики с учетом запаздывания при вводе фондов, оптимальное управление // Тезисы XXXI Дальневосточной математической школы имени академика Е. В. Золотова 3–9 сентября 2006 г. Владивосток, 2006.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М., 1970.
7. *Бугров Я. С.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., 1989.
8. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости М., 1967.