УДК 517.53

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛЕММЫ ГАРТОГСА

Бидерман В. И. – канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Высшая математика»,
e-mail: kras088@mail.ru (ТОГУ)

В данной статье рассматривается возможность обобщения леммы Гартогса из теории субгармонических функций, связанной с переходом от случая поточечной сходимости семейства функций к равномерной сходимости.

This article discusses the possibility of generalization of Hartog's lemma from the theory of subharmonic functions associated with the transition from point-by-point convergence of the collection of functions to uniform convergence.

Ключевые слова: субгармонические функции, непрерывные функции, суммируемые функции, поточечная сходимость, равномерная сходимость.

В теории субгармонических функций известна лемма Гартогса [1], которая нашла свое применение не только в рамках этой теории, но и в комплексном анализе [2].

В представляемой работе рассматривается возможность обобщения леммы, связанной с переходом от случая поточечной сходимости семейства функций к равномерной сходимости.

Пусть $u(x)$ – функция, суммируемая в области $\Omega \subset R^n$. Доопределив ее вне Ω нулем, введем обозначение:

$$(u)_h(x) = \int\limits_{|x-y|\le h} u(y)\omega_h(|x-y|)dy,$$

где: ω_h – усредняющее ядро радиуса $h > 0$.

Предположим, что *u(x)* – непрерывная функция в области $\Omega \subset R^n$, а $\{u_t\}_{0<t<1}$ – семейство субгармонических функций, равномерно ограниченных сверху в Ω. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если для почти всех $x \in \Omega$

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\, u_t(x) \le u(x),$$

то для любого сколь угодно малого положительного числа ε и любого компакта $K \subset \Omega$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(K, \varepsilon)$, что для всех $t \in (0, \delta)$, $x \in K$ истинно неравенство:

$$u_t(x) \le u(x) + \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим, что K – компакт в Ω, и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как *u(x)* – непрерывная функция, то на *K* существует последовательность средних функций $(u)_h(x)$, которая равномерно сходится к *u(x)* [3]. Поэтому найдется $h = h(K, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in K$ будет верным неравенство

$$(u)_h(x) \le u(x) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Согласно лемме Фату [4], функции $\sup\limits_{0<\alpha<t} u_\alpha(x)$, $\overline{\lim\limits_{t\to 0}} u_t(x)$ являются суммируемыми на Ω. Так как $\sup\limits_{0<\alpha<t} u_\alpha(x) \downarrow \overline{\lim\limits_{t\to 0}} u_t(x)$ при $t \to 0$, то для функций $(\sup\limits_{0<\alpha<t} u_\alpha)_h(x)$ и $(\overline{\lim\limits_{t\to 0}} u_t)_h(x)$, которые являются непрерывными на *K*, также справедливо утверждение, что:

$$(\sup_{0<\alpha<t} u_\alpha)_h(x) \downarrow (\overline{\lim_{t\to 0}} u_t)_h(x) \ \forall x \in K.$$

Тогда из теоремы Дини [5] следует, что сходимость функций $(\sup\limits_{0<\alpha<t} u_\alpha)_h(x)$ к $(\overline{\lim\limits_{t\to 0}} u_t)_h(x)$ является равномерной на компакте *K*. А значит, для данного $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(K, \varepsilon)$ такое, что на *K* для всех $t \in (0, \delta)$ имеет место неравенство:

$$(\sup_{0<\alpha<t} u_\alpha)_h(x) < (\overline{\lim_{t\to 0}} u_t)_h(x) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Используя неравенство $\overline{\lim\limits_{t\to 0}} u_t(x) \le u(x)$ из условия теоремы, а также неравенства (1) и (2), получим, что неравенство:

$$(\sup_{0<\alpha<t} u_\alpha)_h(x) < u(x) + \varepsilon \tag{3}$$

справедливо для всех $x \in K$ и $t \in (0, \delta)$.

Так как функции $u_\alpha(x)$ являются субгармоническими, то:

$$(\sup_{0<\alpha<t} u_\alpha)_h(x) \ge (u_\alpha)_h(x) \ge u_\alpha(x) \quad (x \in K,\ \alpha \in (0, t)).$$

Из данной цепочки, а также из неравенства (3) можно сделать вывод, что неравенство $u_t(x) \le u(x) + \varepsilon$ является истинным для всех $x \in K$ и $t \in (0, \delta)$.

Замечание. Условие непрерывности функции $u(x)$ в данном случае является существенным.

В самом деле, допустим, что функция $u(x)$ – субгармоническая. Следовательно, она является полунепрерывной сверху в области Ω. Построим последовательность средних функций $\{(u)_m(x)\}$, где:

$$(u)_m(x) = \int_\Omega u(y)\omega_{\frac{1}{m}}(|x-y|)dy.$$

Из [3] известно, что $(u)_m(x)$ – субгармонические непрерывные функции, сходящиеся поточечно к функции *u(x)* на данном компакте *K* при достаточно больших *m*, для которых $dist\ (K,\partial\Omega) > \frac{1}{m}.$

Далее предположим, что для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое число m_ε, что для всех $x \in K$ при $m \geq m_\varepsilon$ имеет место неравенство:

$$(u)_m(x) \leq u(x) + \varepsilon.$$

Но тогда, рассматривая нижнюю регуляризацию функций в этом неравенстве, получаем, что:

$$(u)_m(x) \leq \varliminf_{y\to x} u(y) + \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, имеем:

$$u(x) \leq \varliminf_{y\to x} u(y) + \varepsilon.$$

А так как *u(x)* полунепрерывная сверху функция, а ε – произвольное положительное сколь угодно малое число, то в итоге мы получаем равенство:

$$u(x) = \varliminf_{y\to x} u(y),$$

справедливое для всех $x \in K$, и являющееся свидетельством непрерывности функции *u(x)*.

Допустим, что *u(x)* – суммируемая функция в области $\Omega \subset R^n$, а $\{u_t\}_{(0<t<1)}$ – семейство субгармонических функций с описанными выше свойствами.

Далее обозначим шар $\{z : |z-x| \leq h\}$ через *B(x,h) (h>0)*, а его объем – *B(h)*. Полагая:

$$B_x^h(u) = \frac{1}{B(h)} \int_{B(x,h)} u(z)dB\ ,$$

сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Если для почти всех $x \in \Omega$:

$$\varlimsup_{t\to 0} u_t(x) \leq u(x),$$

то для компакта $K \subset \Omega$ при любых $\varepsilon > 0$, $0 < h < dist\,(K, \partial\Omega)$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(K, \varepsilon)$, что для всех $t \in (0, \delta)$, $x \in K$ истинно неравенство:

$$u_t(x) \le B_x^h(u(x)) + \varepsilon.$$

Доказательство. Используя сходимость $\sup\limits_{0<\alpha<t} u_\alpha(x) \downarrow \overline{\lim\limits_{t\to 0}}\, u_t(x)$ при $t \to 0$ и субгармоничность функций $(u)_t(x)$, получим следующую цепочку:

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\, u_t(x) = \lim_{t\to 0} \sup_{0<\alpha<t} u_\alpha(x) \le \lim_{t\to 0} \sup_{0<\alpha<t} B_x^h(u(x)) \le$$

$$\le \lim_{t\to 0} B_x^h(\sup_{0<\alpha<t} u_\alpha(x)) = B_x^h(\overline{\lim_{t\to 0}}\, u_t(x)) \le B_x^h(u(x)).$$

Из которой согласно утверждению теоремы 1 следует, что:

$$u_t(x) \le B_x^h(u(x)) + \varepsilon$$

действительно имеет место.

Библиографические ссылки

1. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат – М.: Наука, 1976.
2. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных / Л. И. Ронкин.– М.: Наука, 1971.
3. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. – М.: Высш. школа, 1977.
4. *Акилов Г. П.* Элементарное введение в теорию интеграла / Г. П. Акилов [и др.] – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1969.
5. *Заманский М.* Введение в современную алгебру и анализ / М. Заманский. – М.: Наука, 1974.