ВЕСТНИК ТОГУ. 2011. № 4 (23)

УДК 517.93:518.3

МЕТОД МОМЕНТОВ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Зарубин А. Г. – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Прикладная математика», тел. 37-51-88, e-mail: zarubin@mail.khstu.ru; *Самусенко А. М.* – магистр, тел. 37-51-88, e-mail: samusenkosasha@inbox.ru (ТОГУ)

Исследован метод моментов решения начально-краевой задачи для параболического уравнения. Получены оценки скорости сходимости приближенных решений. Проведен численный эксперимент.

A study of the moments method for solving initial boundary-value problem for parabolic equation is made. The convergence rate of approximate solutions is given. A numerical experiment has been performed.

Ключевые слова: метод моментов, параболические уравнения, начально-краевая задача, скорость сходимости.

Постановка задачи и основной результат

Метод Галёркина-Петрова основан на выборе двух координатных систем элементов, причем приближенное решение находится в виде линейной комбинации по одной базисной системе, а невязка ортогональна другой базисной системе [1]. Если две системы связаны между собой посредством линейного оператора, то данный метод называется методом моментов. Исследованию данного проекционного метода посвящено достаточно большое количество работ, укажем, например [2, 3]. Они посвящены исследованию метода моментов решения краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучению метода Галёркина-Петрова для линейных и квазилинейных операторных уравнений посвящены работы [4, 5]

В цилиндре $Q=(-1,1)\times(0,T)$, где $T<\infty$, исследуется следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(a(x,t)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)+\sum_{j=0}^{r}b_j(x,t)\frac{\partial^j u}{\partial x^j}=f(x,t),(x,t)\in Q \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$u(-1,t)=u_x^{'}(-1,t)=\ldots=u_x^{m-1}(-1,t)=u(1,t)=u_x^{'}(1,t)=\ldots=u_x^{m-1}(1,t)=0,$$
$$t\in[0,T] \qquad (2)$$

и начальным условием:

$$u(x,0)=0, -1\le x\le 1 \qquad (3)$$

Здесь $0\le r\le 2m-1$ целое число, $a(x,t)$ имеет непрерывные производные по x до порядка m в $\overline{Q}$ и непрерывную производную в $\overline{Q}$ вида:

$$\frac{\partial^{m+1}a(x,t)}{\partial t\partial x^m},$$

причем $a(x,t)\ge a_0>0$ для всех $(x,t)\in\overline{Q}$. Функции $b_j(x,t)$ непрерывно-дифференцируемы по t в $\overline{Q}$.

При исследовании уравнения задачи (1)–(3) будем использовать пространство Лебега $L_2(Q)$, пространство С. Л. Соболева $W_p^l(-1;1)(l=1,2,\ldots,2m, p>1)$ (например, [6]).

Пусть $z(x)$ – произвольная функция из $W_2^{2m}(-1,1)\cap \overset{0}{W}{}_2^{m}(-1,1)$, где $\overset{0}{W}{}_2^{m}(-1,1)$ подпространство функций $z(x)$ из $W_2^m(-1,1)$ обращающихся в 0, на границе отрезка $[-1,1]$, вплоть до производных $(m-1)$ порядка.

Так как $b_j(x,t)$ непрерывны в $\overline{Q}$, то:

$$\left\|\sum_{j=0}^{r}b_j(x,t)\,\frac{\partial^j z(x)}{\partial x^j}\right\|_{L2(-1,1)}\le M\|z(x)\|_{W_2^r(-1,1)} \qquad (4)$$

Оценим правую часть (4), используя мультипликативное неравенство для пространств (например, [7]):

$$W_2^r(-1,1), W_2^{2m}(-1,1), L_2(-1,1).$$

Получаем:

$$\|k(t)z(x)\|=\left\|\sum_{j=0}^{r}b_j(x,t)\,\frac{\partial^j z(x)}{\partial x^j}\right\|_{L2(-1,1)}\le M_1\|z(x)\|_{W_2^{2m}(-1,1)}^{\frac{r}{2m}}\|z(x)\|_{L_2(-1,1)}^{1-\frac{r}{2m}} \qquad (5)$$

Из условий на функцию $a(x,t)$ и неравенств коэрцитивности для краевых задач (например, [6]), из неравенства (5) получаем:

$$\|k(t)z(x)\|\le M_2\|A(t)z(x)\|^{\frac{r}{2m}}\|z(x)\|^{1-\frac{r}{2m}} \qquad (6)$$

То есть возмущающие слагаемые в (1) подчинены главному оператору с порядком $\alpha = \dfrac{r}{2m}$.

Если $f(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$, то, как показано в [8], задача (1)–(3) имеет решение $u(x,t)$ из пространства $W_2^{2m,1}(Q)$, которое почти всюду удовлетворяет уравнению (1), а также краевым и начальным условиям (2)–(3).

Приступим к описанию метода Галёркина-Петрова для задачи (1)–(3).

Рассмотрим следующие краевые задачи:

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m}\varphi_j(x)}{\partial x^{2m}} = e_j(x) \tag{7}$$

$$\varphi_j(-1) = \varphi_j'(-1) = \ldots = \varphi_j^{m-1}(-1) = \varphi_j(1) = \varphi_j'(1) = \ldots = \varphi_j^{m-1}(1) = 0, \tag{8}$$

где: $e_j(x)$ – заданная полная ортогональная система функций в $L_2(-1,1)$. Примерами таких функций являются функции-полиномы Лежандра или ортогональная тригонометрическая система (например, [9]).

Известно, что задача (7)–(8) при $j = 0,1,2,\ldots$ имеет решение $\varphi_j(x)$ из $W_2^{2m}(-1,1) \cap \overset{0}{W}{}_2^{m}(-1,1)$, и оно единственно.

Приближенное решение $u_n(x,t)$ задачи (1)–(3) по методу моментов находится в виде конечной суммы $u_n(x,t) = \sum\limits_{s=0}^{n} a_s(t)\varphi_s(x)$, где неизвестные коэффициенты $a_s(t)$ являются решениями задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения вида:

$$P_n \frac{\partial u_n}{\partial t} + P_n A(t) u_n + P_n K(t) u_n = P_n f \tag{9}$$

$$u_n(x,0) = 0, \tag{10}$$

где: P_n – ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на линейную оболочку функций $e_1(x), e_2(x), \ldots, e_n(x)$.

Относительно функций $a(x,t)$ и $b_j(x,t)$ сделаем следующие предположения:

1. Для $a(x,t)$ верно неравенство:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(a(x,t)\frac{\partial^m z(x)}{\partial x^m}\right)\frac{\partial^{2m} z(x)}{\partial x^{2m}}dx \ge M_3\|z(x)\|^2_{W_2^{2m}(-1,1)}, \quad (11)$$

где положительная постоянная M_3 не зависит от выбора функции $z(x)$. Очевидно, что последнее неравенство будет выполнено, если $a(x,t)$ не зависит от x.

2. Функции $b_j(x,t)$ такие, что:

$$\sum_{j=0}^{r}\int_{-1}^{1} b_j(x,t)\frac{\partial^j z(x)}{\partial x^j}z(x)dx \ge 0 \quad (12)$$

В неравенствах (11)–(12) $z(x)$ принадлежит $W_2^{2m}(-1,1)\cap \overset{0}{W}{}_2^{m}(-1,1)$.

Известно, что для любой функции $g(x)$ из $L_2(-1,1)$ уравнения $(-1)^m\frac{\partial^{2m}v(x)}{\partial x^{2m}} = g(x)$ при краевых условиях типа (8) имеет единственное решение из пространства $W_2^{2m}(-1,1)\cap \overset{0}{W}{}_2^{m}(-1,1)$, то есть существует оператор $[(-1)^{2m}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}]^{-1}$, действующий из $L_2(-1,1)$ в $W_2^{2m}(-1,1)\cap \overset{0}{W}{}_2^{m}(-1,1)$. Так как пространство $W_2^{2m}(-1,1)$ компактно вложено в $L_2(-1,1)$, то оператор $[(-1)^m\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}]^{-1}$ будет вполне непрерывным как оператор, действующий из $L_2(-1,1)$ в $L_2(-1,1)$, поэтому функция $\lambda_n = \left\|[(-1)^m\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}]^{-1}(I-P_n)\right\|_{L_2(-1,1)2\to L_2(-1,1)}$ стремится к 0 при $n\to\infty$.

Теорема

Пусть $f(x,t)\in L_2(Q)$, $f(x,0)=0$ и имеет производную $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$, которая почти при каждом t принадлежит $L_2(-1,1)$. Пусть выполнены условия (11) и (12). Тогда при каждом n задача (9)–(11) имеет решение $u_n(x,t)$ из пространства $W_2^{2m,1}(Q)$, и оно единственно. Для приближенных решений $u_n(x,t)$ верна оценка:

$$\sup_t \left\| u_n(x,t) - u(x,t) \right\|^2 + \int_0^T \left\| (u - u_n)_x^m \right\|^2 dt \le M_4 \lambda_n \ , \quad (13)$$

где: $u(x,t)$ – решение задачи (1)–(3).

Доказательство

Умножим скалярно в $L_2(-1,1)$ уравнение (9) на $(-1)^m \dfrac{\partial^{2m} u_n(x,t)}{\partial x^{2m}}$ и проинтегрируем по t от 0 до τ, где $0 \le \tau \le T$. Тогда, используя определение проектора P_n и (11), получаем:

$$\frac{1}{2}\left\| u_{nx}^m(x,\tau) \right\|^2 + M_3 \int_0^\tau \left\| u_n \right\|_{W_2^{2m}} dt + \int_0^\tau \left(K(t)u_n, Au_n \right) dt \le \int_0^\tau \left| \left(f, Au_n \right) \right| dt \quad (14)$$

Из (14) и (6) следует:

$$\frac{1}{2}\left\| u_{nx}^m(x,\tau) \right\|^2 + M_3 \int_0^\tau \left\| u_n \right\|_{W_2^{2m}} dt \le \quad (15)$$

$$\le M_2 \int_0^\tau \left\| Au_n \right\|^{1+\frac{r}{2m}} \left\| u_n \right\|^{1-\frac{r}{2m}} dt + \int_0^\tau \|f\| \left\| Au_n \right\| dt \,.$$

Применим к правой части (15) неравенство Юнга и неравенство Фридрихса и, выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым (например, [6]), получаем:

$$\left\| u_{nx}^m(x,\tau) \right\|^2 \le M_4 \left[\|f\|_{L_2(Q)}^2 + \int_0^\tau \left\| u_{nx}^m \right\|^2 dt \right].$$

Отсюда из неравенства Гронуолла вытекает оценка:

$$\sup_t \left\| u_{nx}^m(x,t) \right\|^2 + \int_0^T \left\| u_n \right\|_{W_2^{2m}}^2 dt \le M_5 \,. \quad (16)$$

Рассмотрим задачу:

$$P_n \frac{\partial v_n}{\partial t} + P_n A(t) v_n + P_n K(t) v_n = P_n f_t' - P_n A'(t) u_n - P_n K'(t) u_n \quad (17)$$

$$v_n(x,0) = 0 \,.$$

Из свойств функций $f(x,t), a(x,t), b_j(x,t)$ правая часть уравнения (17) принадлежит пространству $L_2(Q)$, следовательно, задача (17) при каждом n имеет решение $v_n(x,t)$ из пространства $W_2^{2m,1}(Q)$, и это решение единственно. Для решений $v_n(x,t)$ верны равномерные оценки, подобные (16), а именно:

$$\sup_t \left\| v_{nx}^m(x,t) \right\|^2 + \int_0^T \left\| v_n \right\|^2_{W_2^{2m}} dt \le M_6 \tag{18}$$

Так как $f(x,0)=0$, то из (9) получаем $P_n u_{nt}^{'}(x,0)=0$, умножим последнее тождество скалярно в $L_2(-1,1)$ на $Au_{nt}^{'}(x,0)$. Тогда $0=\left(P_n u_{nt}^{'}(x,0), Au_{nt}^{'}(x,0)\right)=\left\| u_n^{m+1}(x,0)\right\|^2$.

Отсюда следует, что $u_{nt}^{'}(x,0)=0$.

Функции $A(x,t), B_j(x,t), f(x,t)$ дифференцируемы по t, поэтому решение $u_n(x,t)$ задачи (9)–(10) удовлетворяет тождествам:

$$P_n u_{nt}^{''} + P_n A(t) u_{nt}^{'} + P_n K(t) u_{nt}^{'} = P_n f_t^{'} - P_n A^{'}(t) u_n - P_n K^{'}(t) u_n$$

$$u_n(x,0) = u_{nt}^{'}(x,0) = 0$$

Отсюда и из (17) вытекает, что для $z_n(x,t)=u_{nt}^{'}(x,t)-v_n(x,t)$ верно тождество:

$$P_n z_{nt}^{'} + P_n A(t) z_n + P_n K(t) z_n = 0$$

$$z_n(x,0) = 0$$

Последнее тождество выполняется, когда $z_n(x,t)=0$. Итак, $u_{nt}^{'}(x,t)=v_n(x,t)$. Следовательно, согласно (18):

$$\sup_t \left\| u_{nt}^{'}(x,t) \right\| \le M_7 \tag{19}$$

Вернемся к задачам (1)–(3) и (9)–(10). Для решений $u(x,t)$ и $u_n(x,t)$ данных задач верно тождество:

$$\begin{aligned} &(u-u_n)_t^{'} + A(t)(u-u_n) + K(t)(u-u_n) = \\ &= (I-P_n)\left[f - u_{nt}^{'} - A(t)u_n - K(t)u_n\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Умножим тождество (20) скалярно в $L_2(-1,1)$ на $(u-u_n)$, и проинтегрируем по t от 0 до τ $(\tau \le T)$. Тогда, используя неравенство (12) и определение функции $\lambda(n)$, получаем:

$$\frac{1}{2}\left\|(u(x,\tau)-u_n(x,\tau))\right\|^2+\int_0^{\tau}\left\|(u-u_n)_x^m\right\|^2 dt\le$$

$$M_8(\lambda(n))^{\frac{1}{2}}\int_0^{\tau}\left[\left\|u'_{nt}\right\|+\left\|A(t)u_n\right\|+\left\|K(t)u_n\right\|\right]\left\|(u-u_n)_x^m\right\|dt$$

Отсюда и из оценок (16), (19) вытекает неравенство:

$$\frac{1}{2}\left\|(u(x,\tau)-u_n(x,\tau))\right\|^2+\int_0^{\tau}\left\|(u-u_n)_x^m\right\|^2 dt\le$$

$$M_9(\lambda(n))^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\tau}\left\|(u-u_n)_x^m\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Отсюда следует (13). Теорема доказана.

Численный эксперимент

В данном параграфе проводится численный эксперимент метода моментов для задачи (1)–(3), когда m = 2, r = 3, $a(x,t)=1$, $b_j(x,t)$ удовлетворяют (12).

Приближенное решение $u_n(x,t)$ исследуемой начально-краевой задачи находим в виде:

$$u_n(x,t)=a_0(t)\varphi_0(x)+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s(t)\varphi_s(x)+\sum_{s=1}^{n}\beta_s(t)\psi_s(x)\,,$$

где:

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{24}$$

$$\varphi_s(x)=\frac{(-1)^{s+1}}{(s\pi)^4}+\frac{\cos(s\pi x)}{(s\pi)^4}$$

$$\psi_s(x)=\frac{(-1)^s x}{2(s\pi)^3}+\frac{(-1)^{s+1}x^3}{2(s\pi)^3}+\frac{\sin(s\pi x)}{(s\pi)^4}\,.$$

Неизвестные коэффициенты $a_0(t),\alpha_s(t),\beta_s(t)$ являются решение следующей задачи Коши:

$$a'_0(t)\int_{-1}^{1}\varphi_0(x)e_m(x)dx+\sum_{s=1}^{n}\alpha'_s(t)\int_{-1}^{1}\varphi_s(x)e_m(x)dx+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\beta_s'(t)\int_{-1}^{1}\psi_s(x)e_m(x)dx+$$

$$+a_0(t)\int_{-1}^{1}\left(\varphi_0^{(IV)}(x)+\sum_{j=0}^{3}\left(b_j(x,t)\varphi_0^j(x)\right)\right)e_m(x)dx+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s(t)\int_{-1}^{1}\left(\varphi_s^{(IV)}(x)+\sum_{j=0}^{3}\left(b_j(x,t)\varphi_s^j(x)\right)\right)e_m(x)dx+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\beta_s(t)\int_{-1}^{1}\left(\beta_s^{(IV)}(x)+\sum_{j=0}^{3}\left(b_j(x,t)\psi_s^j(x)\right)\right)e_m(x)dx-$$

$$-\int_{-1}^{1}f(x,t)e_m(x)dx=0$$

$$a_0(0)=\alpha_s(0)=\beta_s(0)=0\,,\ m=0,1..n$$

Полученную систему линейных дифференциальных уравнений при n = 100 решаем методом Эйлера с шагом $\tau = 0{,}01$.

Рассмотрим конкретные примеры построения приближенных решений, когда $b_j(x,t)$ и $f(x,t)$ конкретно заданы.

1. Пусть, например, $f(x,t) = tx\ (x^3-1)$, $b_0(x,t)=0$, $b_1(x,t)=(t+1)e^{-x}$, $b_2(x,t)=0$, $b_3(x,t)=0$. Приближенное решение, полученное по методу моментов, представлено на рис. 1.

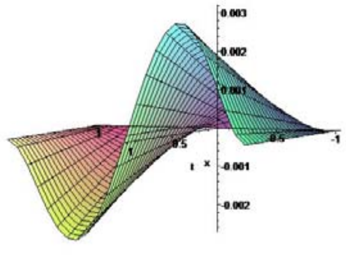

Рис. 1. Численный эксперимент № 1

2. Если $b2, b3 = 0$, $f(x,t) = tx\ (x^3 - 1)$, $b_0(x,t) = 100x^8$, $b_1(x,t) = (t+1)e^{-x}$, то приближенное решение представлено на рис. 2.

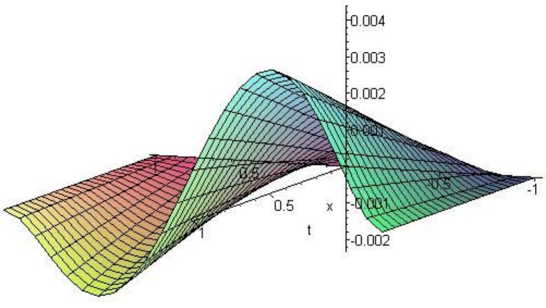

Рис. 2. Численный эксперимент № 2

Библиографические ссылки

1. *Петров Г. И.* Применение метода Галёркина-Петрова к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости // Прикладная математика и механика. – 1940. – Т. 4.

2. *Дауговет И. К.* О методе моментов для обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. – 1965. – Т. 6. – № 1.

3. *Вайникко Г. М.* О быстроте сходимости метода моментов для обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. – 1968. – Т. 9. – № 1.

4. *Зарубин А. Г.* О методе моментов для одного класса нелинейных уравнений // Сибирский математический журнал. – 1978. – Т. 19. – № 3.

5. *Зарубин А. Г.* Исследование проекционной процедуры Галёркина-Петрова методом дробных степеней // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 297. – № 4.

6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.

7. *Глушко В. П., Крейн С. Г.* Неравенства для норм производных в пространствах с весом // Сибирский математический журнал. – 1960. – Т. 1. – № 3.

8. *Zarubin A. G., Vinogradova P. V.* Projection method for Cauchy problem for an operator-differential equation // Numerical Functional Analysis and Optimization. – V. 30 (1–2). – 2009.

9. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976.