



УДК 517.95: 517.977

© Л. В. Илларионова, 2011

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫМИ АКУСТИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

Илларионова Л. В. – канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. ВЦ ДВО РАН, e-mail: illarionova_1@list

Рассмотрена задача оптимального управления для стационарных уравнений дифракции акустических волн на трехмерном включении. Она заключается в минимизации отклонения поля давлений во включении от некоторого заданного, за счет изменения источников звука во внешней среде. Разработан и реализован в виде комплекса программ на ЭВМ алгоритм решения задачи оптимизации, приведены результаты тестовых расчетов и численного моделирования.

The optimal control problem for stationary equations of acoustic waves diffraction on a three-dimensional inclusion is considered. The problem is to minimize the deviation of pressure field in the inclusion from a given one due to a variation of the sound source in the medium. A solution algorithm of control problem is designed and numerically realized as a set of programs for PC. The results of test computations and numerical modelling are presented.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, задача дифракции, численное решение задачи управления.

Введение

Обратные и оптимизационные задачи для уравнений акустических колебаний исследовались во многих работах ([1, 2, 3, 4]). Постоянно появляются все новые области применения теории оптимизации акустических волн. Так, в [5] такой подход был применен для решения задачи о минимизации излучения, исходящего от мобильных телефонов. Однако задачи оптимизации для уравнений дифракции акустических волн все еще остаются плохо изученными.

Пусть в пространстве R^3 , заполненном однородной изотропной средой, имеется однородное, ограниченное, изотропное включение Ω_i со связной границей S . Положим $\Omega_e = R^3 / \overline{\Omega_i}$ и обозначим $\rho_{i(e)}$, $c_{i(e)}$, $\gamma_{i(e)}$ – плотность,

скорость распространения акустических колебаний и коэффициент поглощения в $\Omega_{i(e)}$ соответственно.

Предположим, что в области Ω_e имеются источники звука. Звуковые волны распространяются в пространстве и, достигая включения, рассеиваются на нем. В результате в области Ω_e возникают отраженные волны, а в Ω_i – проходящие волны.

Рассмотрим следующую задачу: изменяя источники звука в Ω_e , минимизировать отклонение поля давлений в Ω_i (либо на некотором подмножестве $Q \subset \Omega_i$) от некоторого требуемого. При этом изменение источников звука не должно быть «большим». Математически ее можно сформулировать следующим образом.

Найти функции $f: S \rightarrow C$ (управление) и $\Phi_i: \bar{\Omega}_i \rightarrow C$, $\Phi_e: \bar{\Omega}_e \rightarrow C$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\Delta \Phi_i + k_i^2 \Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad (1)$$

$$\Delta \Phi_e + k_e^2 \Phi_e = 0 \text{ в } \Omega_e, \quad (2)$$

$$\Phi_i - \Phi_e = g, \quad p_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{n}} - p_e \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{n}} = f \text{ на } S, \quad (3)$$

$$\partial \Phi_e / \partial |x| - ik_e \Phi_e = o(|x|^{-1}) \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$J(\Phi_i, f) = 1/2 \int_Q |\Phi_i - \Phi_d|^2 dx + \lambda/2 \int_S |f - f_d|^2 ds \rightarrow \min, f \in K. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ – единичный вектор нормали к поверхности S (направленный в сторону Ω_e),

$$k_{i(e)}^2 = \omega(\omega + i\gamma_{i(e)})c_{i(e)}^{-2}, \quad p_{i(e)} = (\rho_{i(e)}\omega(\omega + i\gamma_{i(e)}))^{-1},$$

ω – круговая частота колебаний; g , Φ_d , f_d – заданные на соответствующих множествах комплекснозначные функции, K – некоторое выпуклое множество функций, заданных на S (множестве допустимых управлений).

В статье [6] был проведен теоретический анализ поставленной задачи (1)–(5). А именно, доказана ее разрешимость, предложен алгоритм численного решения и обоснована его сходимость.

В настоящей работе представлены результаты численного решения задачи (1)–(5) на основе разработанного в [6] алгоритма.

Алгоритм решения задачи (1)–(5)

Пусть e_1, \dots, e_M – линейно независимая система функций, заданных на S . Положим $K_M = K \cap \text{Span}\{e_1, \dots, e_M\}$, где $\text{Span}\{e_1, \dots, e_M\}$ – линейная оболочка функций e_1, \dots, e_M . Пусть U_M – множество троек (Φ_i, Φ_e, f) , удовлетворяющих (1)–(4), причем $f \in K_M$.



Рассмотрим следующую задачу. Найти функции $(\Phi_i^{(M)}, \Phi_e^{(M)}, f^{(M)}) \in U_M$ такие, что:

$$J(\Phi_i^{(M)}, f^{(M)}) \leq J(\Phi_i, f) \quad \forall (\Phi_i, \Phi_e, f) \in U_M. \quad (6)$$

Вопрос о сходимости решения задачи (6) к решению исходной задачи (1)–(5) рассмотрен в [6].

Функции $\Phi_{i(e)}^{(M)}$ ищем в виде:

$$\Phi_{i(e)}^{(M)} = \Psi_{i(e)}^{(0)} + \Psi_{i(e)},$$

где $\Psi_{i(e)}^{(0)}$ являются решением следующей задачи дифракции:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_{i(e)}^{(0)} + k_{i(e)}^2 \Psi_{i(e)}^{(0)} &= 0 \text{ в } \Omega_{i(e)}, \\ \Psi_i^{(0)} - \Psi_e^{(0)} &= g, \quad p_i \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} - p_e \frac{\partial \Psi_e^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на } S, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\partial \Psi_e^{(0)} / \partial |x| - ik_e \Psi_e^{(0)} = o(|x|^{-1}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty,$$

а новые неизвестные $\Psi_{i(e)}$ и $f^{(M)}$ должны удовлетворять соотношениям:

$$\Delta \Psi_{i(e)} + k_{i(e)}^2 \Psi_{i(e)} = 0 \text{ в } \Omega_{i(e)}, \quad (8)$$

$$\Psi_i - \Psi_e = 0, \quad p_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{n}} - p_e \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{n}} = f^{(M)} \text{ на } S, \quad (9)$$

$$\partial \Psi_e / \partial |x| - ik_e \Psi_e = o(|x|^{-1}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \int_Q |\Psi_i - \Psi_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_S |f^{(M)} - f_d|^2 \rightarrow \min, \quad f^{(M)} \in K_M. \quad (11)$$

Здесь $\Psi_d = \Phi_d - \Psi_i^{(0)}$.

Пусть функции $\Psi_{k,i}, \Psi_{k,e}$ ($k = \overline{1, M}$) являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_{k,i(e)} + k_{i(e)}^2 \Psi_{k,i(e)} &= 0 \text{ в } \Omega_{i(e)}, \\ \Psi_{k,i} - \Psi_{k,e} &= 0, \quad p_i \frac{\partial \Psi_{k,i}}{\partial \mathbf{n}} - p_e \frac{\partial \Psi_{k,e}}{\partial \mathbf{n}} = e_k \quad \text{на } S, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\partial \Psi_k / \partial |x| - ik_e \Psi_k = o(|x|^{-1}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

Определим функцию:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \int_Q \left| \sum_{k=1}^M \xi_k \Psi_k - \Psi_d \right|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_S \left| \sum_{k=1}^M \xi_k e_k - f_d \right|^2 ds \quad \text{при } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_M) \in R^M$$

и множество:

$$K_\xi = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_M) \in R^M : \sum_{k=1}^M \xi_k e_k \in K_M \right\}.$$

Нетрудно заметить, что тогда решение задачи (8)–(11) определяется формулами:



$$f^{(M)} = \sum_{k=1}^M \xi_k e_k, \quad \Psi_i = \sum_{k=1}^M \xi_k \Psi_{k,i}, \quad \Psi_e = \sum_{k=1}^M \xi_k \Psi_{k,e},$$

где: $(\xi_1, \dots, \xi_M) = \arg \min_{\xi \in K_\xi} \varphi(\xi)$.

Если, например, $K = L^2(S)$, то нахождение ξ_1, \dots, ξ_M сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Отметим, что при численном решении поставленной задачи основной объем вычислений приходится на решение прямых задач дифракции (12).

Результаты численного решения

В примерах (1, 2) приводятся результаты сравнения приближенного решения задачи оптимального управления с точным, а в примерах (3–6) – результаты численного решения для различных значений входных параметров.

Условия расчетов

1) $\Omega_i = Q$ – шар единичного радиуса с центром в начале координат;

2) множество допустимых управлений $K = L^2(S)$;

3) для решения задач дифракции (7) и (12) использовался алгоритм, описанный в [7]. Он состоит в следующем. Методами теории потенциала задача дифракции сводится к смешанной системе слабо сингулярных граничных интегральных уравнений Фредгольма 1 и 2 рода на S . Аппроксимация интегральных уравнений системой линейных алгебраических уравнений осуществляется при помощи разбиения единицы на S , связанного с системой узловых точек, а также согласованного с порядком дискретизации метода осреднения слабо сингулярных ядер интегральных операторов. Возникающие при дискретизации многократные интегралы вычисляются аналитически. Это позволяет получать в явном виде формулы для аппроксимации граничных интегральных операторов с особенностями в ядрах и использовать их для вычисления коэффициентов систем линейных алгебраических уравнений. При этом не требуется предварительная триангуляция поверхности.

Через N обозначаем число точек дискретизации, использованных при решении задач дифракции.

4) пусть:

$$M_\varphi, M_\theta \in N, \quad M = M_\varphi \cdot M_\theta, \quad \varphi_j = 2\pi j / M_\varphi, \quad j = \overline{0, M_\varphi - 1}, \quad \theta_m = \pi m / M_\theta, \quad m = \overline{0, M_\theta}.$$

В качестве e_k выбирались функции, половина которых в сферических координатах (ρ, φ, θ) , ($\rho = |x|$, φ – долгота, θ – широта) определяются формулами (функции «шапочки» в координатах (φ, θ)):

$$e_k(\varphi, \theta) = h \left(\sqrt{|\varphi_j - \varphi|^2 + |\theta_m - \theta|^2} \right)$$

при $k = jM_\theta + m$, $j = \overline{0, M_\varphi - 1}$, $m = \overline{0, M_\theta}$,



$$h(t) = \begin{cases} \exp(t^2/(t^2 - \pi^2)) & \text{при } |t| < \pi, \\ 0 & \text{при } |t| \geq \pi. \end{cases}$$

Вторая половина функций e_k получена из определенных выше умножением на мнимую единицу.

Результаты тестовых расчетов

Исходные данные для тестовых расчетов выбирались следующим образом. Пусть функция:

$$\Phi_d = \begin{cases} \Phi_{d,i} & \text{в } \Omega_i, \\ \Phi_{d,e} & \text{в } \Omega_e \end{cases}$$

удовлетворяет уравнениям Гельмгольца (1), (2) и условию излучения (4). Тогда, если:

$$g = \Phi_{d,i} - \Phi_{d,e}, \quad f_d = p_i \frac{\partial \Phi_{d,i}}{\partial n} - p_e \frac{\partial \Phi_{d,e}}{\partial n} \quad \text{на } S, \quad (13)$$

то очевидным решением задачи (1)–(5) являются $\Phi_i = \Phi_{d,i}, \Phi_e = \Phi_{d,e}, f = f_d$.

То есть в этом случае точное решение нам известно.

Обозначаем:

$$\delta = \frac{\|\Phi_i - \Phi_i^*\|_{L^2(\Omega_i)}}{\|\Phi_i^*\|_{L^2(\Omega_i)}} \cdot 100$$

относительная L^2 – погрешность решения в Ω_i (Φ_i – приближенное, а Φ_i^* – точное решение).

Пример 1. Исходные данные: $\rho_i = 5, c_i = 1, \gamma_i = 0.02, \rho_e = 3, c_e = 0.5, \gamma_e = 0.05$,

$$\Phi_d(x) = \begin{cases} \exp(ik_i x_3) & \text{в } \Omega_i, \\ |x|^{-1} \exp(ik_e |x|) & \text{в } \Omega_e. \end{cases}$$

Функции g и f_d определяются формулами (13).

На рис. 1 приведены графики зависимости относительной погрешности δ от числа M (число функций e_k) при различных значениях N (число точек дискретизации задачи дифракции). Параметр $\lambda = 0$ для рис. 1 (а) и $\lambda = 5$ для рис. 1 (б).

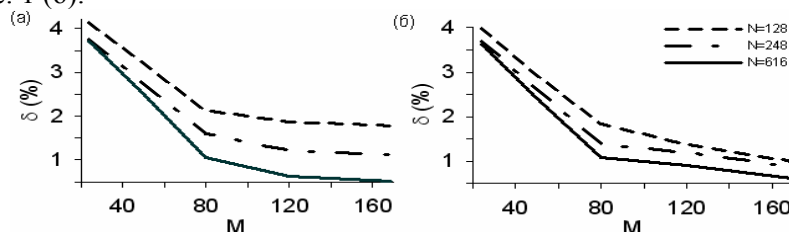


Рис. 1. Графики погрешности при (а) $\lambda = 0$; (б) $\lambda = 5$ (пример 1)

Пример 2. Функция Φ_d имеет вид:

$$\Phi_d(x) = \begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) \cos(k_i x_3) & \text{в } \Omega_i, \\ |x|^{-1} \exp(ik_e |x|) & \text{в } \Omega_e. \end{cases}$$

Все остальные параметры такие же, как и в примере 1.

На рис. 2 приведены графики зависимости относительной погрешности δ от числа M при различных значениях N . Параметр $\lambda = 0$ для рис. 2 (а) и $\lambda = 5$ для рис. 2 (б).

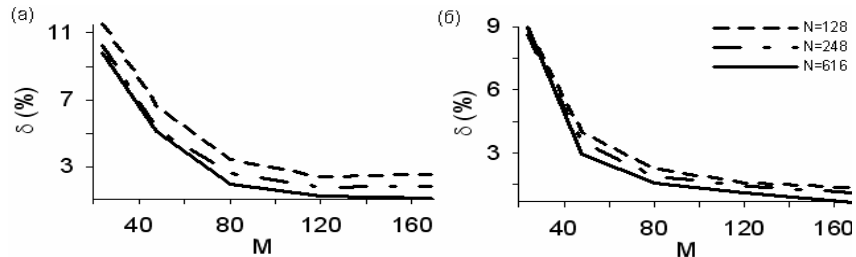


Рис. 2. Графики погрешности при (а) $\lambda = 0$; (б) $\lambda = 5$ (пример 2)

Из рис. 1, 2 видно, что погрешность при разных значениях λ отличается незначительно. Количество M функций e_k оказывает большее влияние на погрешность, чем количество N точек дискретизации прямых задач дифракции. Анализируя результаты проведенных тестовых расчетов, приходим к выводу, что предложенный численный метод сходится, и позволяет эффективно решать задачи оптимизации акустических полей.

Результаты численного моделирования

Пример 3. Исходные данные:

$$\Phi_d = x_1^2 - x_2^2, f_d = 0, g = 0, \rho_i = 5, c_i = 1, \gamma_i = 0.02, \rho_e = 3, c_e = 0.5, \gamma_e = 0.05.$$

На рис. 3 изображены линии уровня и проективная поверхность функции Φ_i на квадрате $|x_{1,2}| \leq 0.45, x_3 = 0$ при (а) $\lambda = 0$, (б) $\lambda = 5$. На рис. 4 изображены проективные кривые функций Φ_d и Φ_i при разных значениях параметра λ на отрезке (а) $|x_2| \leq 0.45, x_1 = x_3 = 0$; (б) $|x_1| \leq 0.45, x_2 = x_3 = 0$.

Пример 4. Функция Φ_d имеет вид $\Phi_d = \sin(\pi x_1)$. Остальные параметры как и в примере 3.

На рис. 5 изображены линии уровня и проективная поверхность функции $|\Phi_i|$ на квадрате $|x_{1,2}| \leq 0.45, x_3 = 0$ при (а) $\lambda = 0$, (б) $\lambda = 5$. На рис. 6 изображены проективные кривые функций $|\Phi_d|$ и $|\Phi_i|$ при разных значениях параметра λ на отрезке (а) $|x_2| \leq 0.45, x_1 = x_3 = 0$; (б) $|x_1| \leq 0.45, x_2 = 0.4, x_3 = 0$.

Рис. 3–6 позволяют судить о влиянии параметра λ на поле оптимального давления. Поля, полученные в результате оптимизации, близки к функции Φ_d при малых значениях параметра λ , и повторяют ее форму при больших



λ . Уменьшение параметра λ приводит к уменьшению разности $|\Phi_d - \Phi_i|$.

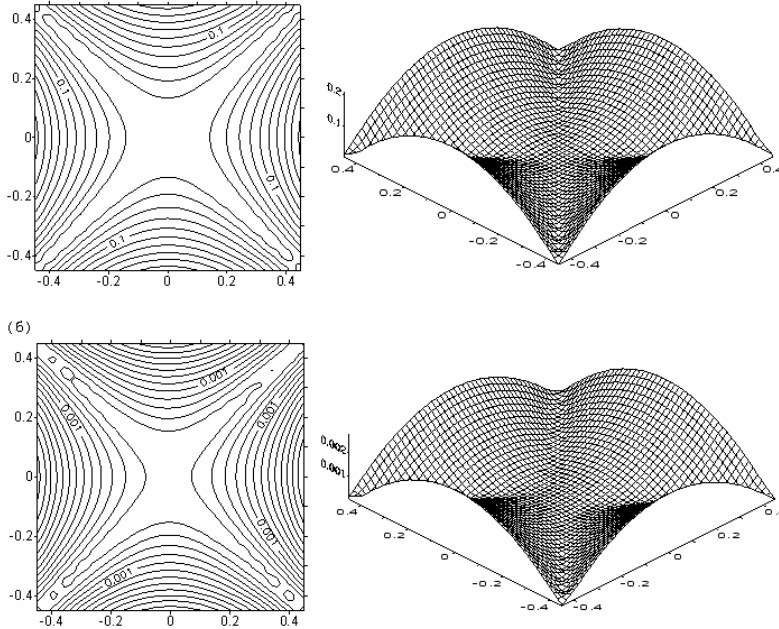


Рис. 3. Линии уровня и проективная поверхность Φ_i при (а) $\lambda = 0$; (б) $\lambda = 5$

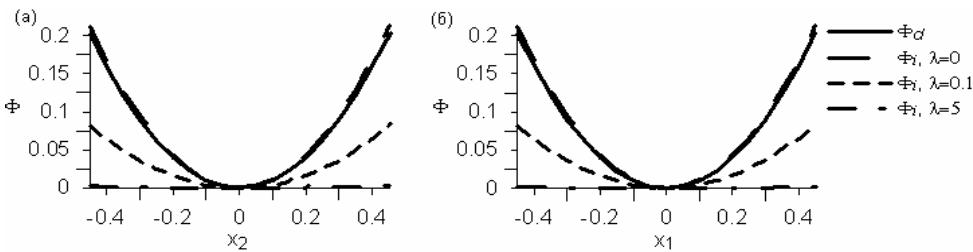


Рис. 4. Проективные кривые функций Φ_i, Φ_d (пример 3).

Пример 5 (задача гашения звука)

$$\Phi_d = 0, \quad f_d = \exp(ik_e |x - y|) / |x - y|, \quad y = (2, 0, 0), \quad g = 0.$$

Остальные параметры такие же, как в примере 3. С физической точки зрения это означает, что мы хотим «погасить» звуковое поле во включении, создаваемое точечным источником.

На рис. 7 изображены линии уровня и проективная поверхность функции $|\Phi_i|$ на квадрате $|x_{1,2}| \leq 0.45, x_3 = 0$ при (а) $\lambda = 0.01$, (б) $\lambda = 1$. На рис. 8 изображены проективные кривые функций $|\Phi_d|$ и $|\Phi_i|$ при разных значениях параметра λ на отрезке (а) $|x_2| \leq 0.45, x_{1,3} = 0$; (б) $|x_1| \leq 0.45, x_{2,3} = 0$.

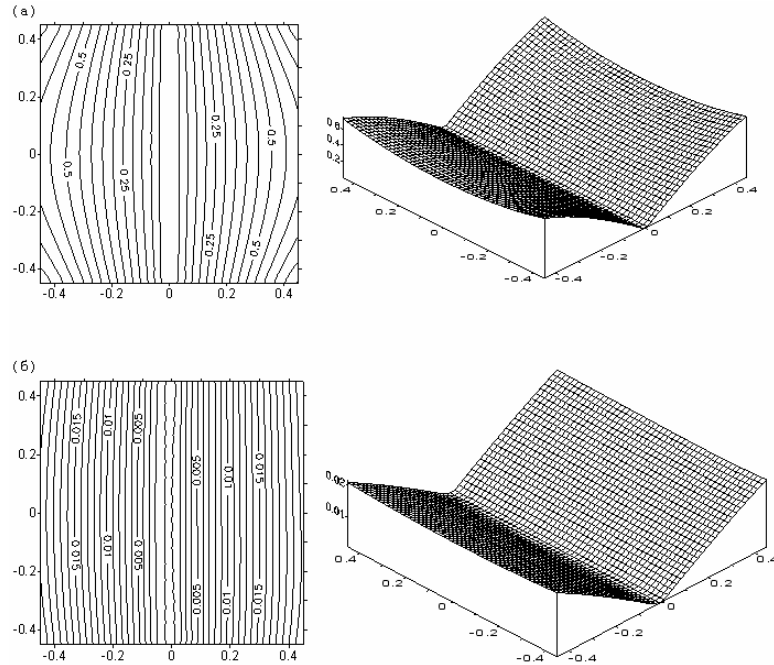


Рис. 5. Линии уровня и проективная поверхность $|\Phi_i|$ при (а) $\lambda = 0$, (б) $\lambda = 5$

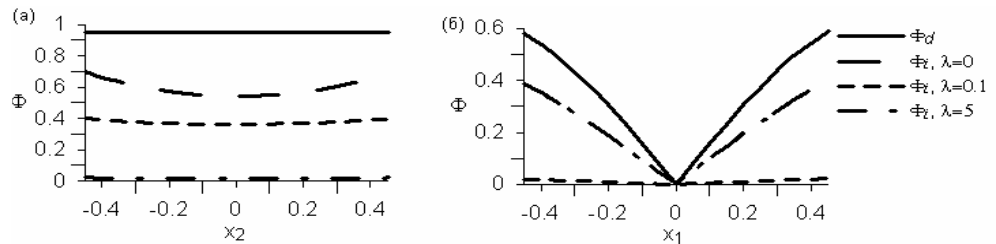


Рис. 6. Проективные кривые функций $|\Phi_i|, |\Phi_d|$ (пример 4)

Источник звуковых волн расположен справа от включения. Из рисунков видно, что наибольшее отклонение от требуемого поля происходит в той части включения, которая находится ближе к источнику.

Пример 6 (задача гашения звука)

В отличие от примера 5, $f_d = \exp(ik_e x_3)$ (звуковое поле создается плоской волной).

На рис. 9 изображены линии уровня и проективная поверхность функции $|\Phi_i|$ на квадрате $|x_{1,2}| \leq 0.45$, $x_3 = 0$ при (а) $\lambda = 0.01$, (б) $\lambda = 1$. На рис. 10 изображены проективные кривые функций $|\Phi_d|$ и $|\Phi_i|$ при разных значениях параметра λ на отрезке (а) $|x_2| \leq 0.45$, $x_{1,3} = 0$; (б) $|x_1| \leq 0.45$, $x_{2,3} = 0$.

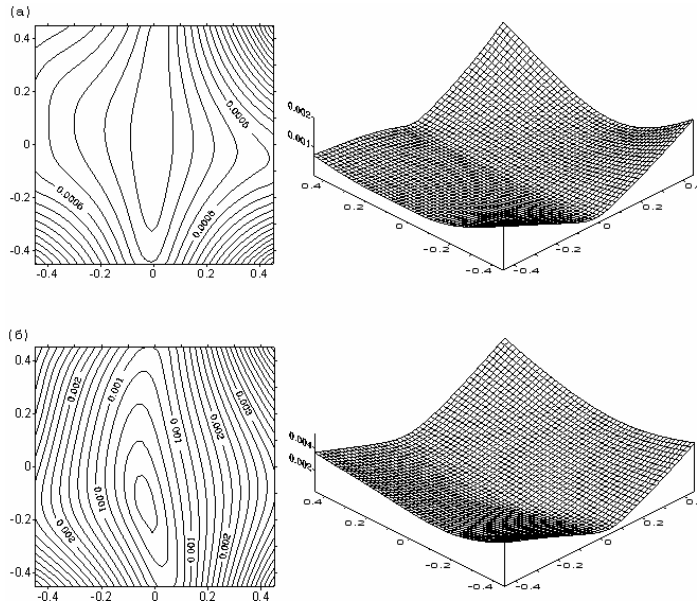


Рис. 7. Линии уровня и проективная поверхность $|\Phi_i|$ при (а) $\lambda = 0.01$; (б) $\lambda = 1$

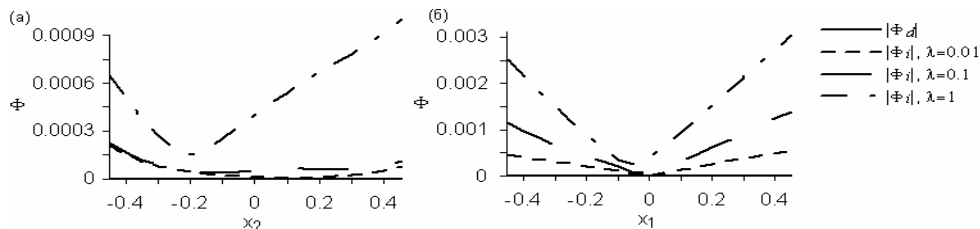


Рис. 8. Проективные кривые функции $|\Phi_i|$ (пример 5).

На рис. 7–10 видно, что чем меньше значение λ , то есть, чем больше мы можем изменять источники поля во внешней среде, тем ближе расчетное поле к нулю.

Численные эксперименты и приведенные примеры показывают, что используемые методы численного решения поставленных задач обладают достаточно высокой точностью, удобны для реализации на ЭВМ, не требуют больших затрат машинного времени и могут быть применены для решения подобных задач математической физики.

Работа выполнена в рамках ФЦП (№ 02.740.11.0626) при поддержке грантов ДВО РАН (проекты №№ 09-И-СО-005, 09-И-П2-01), РФФИ (проекты №№ 11-01-00757, 11-01-98513) и Программы Президиума РАН № 2.

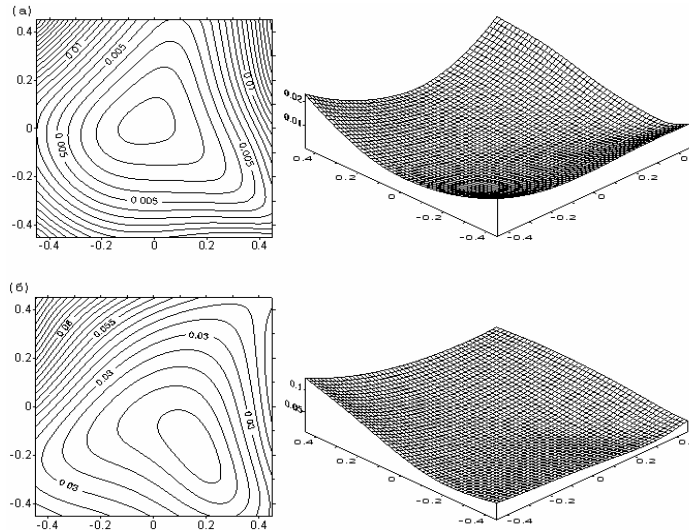


Рис. 9. Линии уровня и проективная поверхность $|\Phi_i|$ при (а) $\lambda = 0.01$; (б) $\lambda = 1$

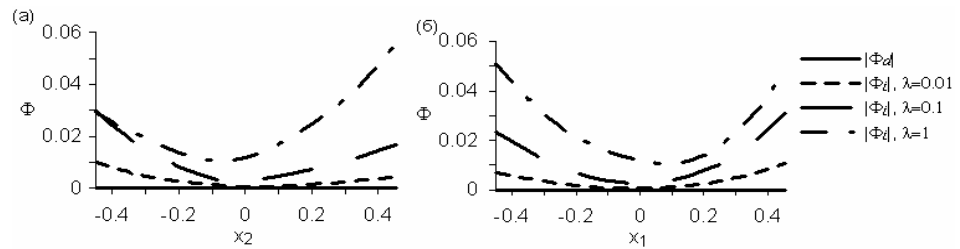


Рис. 10. Проективные кривые функции $|\Phi_i|$ (пример 6)

Библиографические ссылки

1. *Scattering theory* / P. D. Lax, R. S. Phillips // Q. J. Math. – 1971. – Vol. 22.
2. *The determination of the surface impedance of an obstacle from measurements of the far field pattern* / D. Colton, A. Kirsch // SIAM J. Appl. Math. – 1981. – Vol. 41.
3. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: Мир. – М., 1987.
4. Angell T. S., Kirsch A. Optimization methods in electromagnetic radiation: Springer, 2004.
5. *Optimization of rod antennas of mobile phones* / J. Jahn, A. Kirsch, C. Wagner // Math. Meth. Oper. Res. – 2004.
6. Илларионова Л. В. Задача оптимального управления для стационарных уравнений дифракции акустических волн // ЖВМ и МФ. – 2008. – Т. 48. – № 2.
7. Ершов Н. Е., Илларионова Л. В., Смагин С. И. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15. – № 1.