ВЕСТНИК ТОГУ. 2011. № 3 (22)

УДК 517.91:519.21

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАДАННЫМ НАБОРОМ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Карачанская Е. В. – канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Высшая математика», e-mail: Chalykh@mail.khstu.ru (ТОГУ)

Предложен алгоритм построения множества систем дифференциальных уравнений (обыкновенных и стохастических), для которых заданный набор независимых функций является множеством первых интегралов и доказывается полнота полученных семейств систем уравнений.

A new construction algorithm for the set of the diffrrential equation (ordinary and stochastic) systems is proposed. For which the prescribed set of independent functions presents the set of the first integrals. We prove that the set of the diffrrential equation systems is full.

Ключевые слова: первый интеграл, обыкновенное дифференциальное уравнение, стохастическое дифференциальное уравнение, построение системы уравнений.

Введение

Задача построения дифференциального уравнения, имеющего заданное решение, является одной из важных задач механики.

В [1, 2] на основе введенного определения первого интеграла для системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) был определен алгоритм построения системы СДУ, имеющей заданный набор ее первых интегралов. Представленный в данной работе метод опирается на подход, использованный в [1].

Н. П. Еругин в [3] предложил метод для построения множества дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. Данный метод основан на определении интегральной кривой, как геометрической интерпретации решения системы дифференциальных уравнений и включает в себя построение специфического вида функций, зависящих от представленной функции, с дальнейшим построением еще ряда функций, обеспечивающих условия для того, чтобы данная функция была решением определяемой системы уравнений.

Как отмечено в [4], «Первый интеграл $\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = C$ при фиксированном C можно интерпретировать как n-мерную поверхность в

$(n+1)$-мерном пространстве с координатами $t, x_1, \ldots, x_n$, обладающую тем свойством, что каждая интегральная кривая, имеющая общую точку с этой поверхностью, целиком лежит на поверхности». В силу определения, интегральная поверхность есть локальный первый интеграл, и в отличие от глобального первого интеграла, он определен только в части векторного пространства.

Рассматриваемый нами метод отличен от метода Н. П. Еругина и методов, на нем построенных, он не является ни обобщением, ни частным случаем описанных выше, поскольку мы используем глобальный первый интеграл. Данный метод основан на использовании свойств различных произведений векторов и позволяет строить множество систем дифференциальных уравнений, описывающих движение как невозмущенной, так и возмущенной динамической системы с вероятностью 1, не затрагивая аппарат функций Ляпунова. Кроме того, определенное предлагаемым образом управление обеспечивает движение системы на заданном многообразии сколь угодно долгое время [5]. Доказательство полноты семейства дифференциальных уравнений, обладающих заданным набором первых интегралов, опирается на метод построения данного семейства ДУ. Впервые подобный метод был применен в [1]. Исследования для случайных сред начались с работы [6].

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $u(t;\mathbf{x})$ – вещественная функция, определенная на открытом подмножестве $\mathrm{D} \subset \mathrm{R} \times \mathrm{R}^n$, являющаяся первым интегралом системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A(t;\mathbf{x}(t)), \qquad \mathbf{x}(t) \in \mathrm{R}^n. \tag{1}$$

Тогда $u(t;\mathbf{x})$ сохраняет постоянное значение вдоль любого решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ системы (1), график которого целиком лежит в D: $u\left(t;\mathbf{x}(t)\right) \equiv C$. Следовательно, $du(t;\mathbf{x}(t)) = 0$, что соответствует следующему уравнению для $u(t;\mathbf{x})$ в частных производных:

$$\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_1}\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_2}\frac{dx_2(t)}{dt} + \ldots + \frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_n}\frac{dx_n(t)}{dt} = 0 \tag{2}$$

Если правая часть уравнения (1) может быть представлена в виде $A(t;\mathbf{x}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^*$, где $a_i = a_i(t;\mathbf{x})$ (знак * означает транспонирование), то равенство (2) можно переписать в виде:

$$\left.\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_1}a_1(t;\mathbf{x}) + \frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_2}a_2(t;\mathbf{x}) + \ldots + \frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_n}a_n(t;\mathbf{x})\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = 0. \tag{3}$$

Пусть $\nabla u(t;\mathbf{x})$ – обобщенный градиент функции $u(t;\mathbf{x})$:

$$\mathrm{W}u(t;\mathbf{x})=\left(\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial t};\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_1};\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_2};\ldots;\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_n}\right). \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение вектор $A(t,x)=(1,a_1,a_2,..,a_n)^*$, $a_i=a_i(t;\mathbf{x})$. Тогда равенство (3) можно представить в виде скалярного произведения векторов $A^*(t;x)$ и $\mathrm{W}u(t;\mathbf{x}):(Wu(t;x),A^*(t;x))\big|_{x=x(t)}=0$. Равенство нулю скалярного произведения означает, что векторы $A^*(t;x(t))$ и $\mathrm{W}u(t;\mathbf{x}(t))$ ортогональны. Следовательно, если дифференциальное уравнение (1) имеет множество первых интегралов $\left\{u_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{k}$, то все векторы $\mathrm{W}u_j(t;\mathbf{x})$ должны быть ортогональны вектору $A^*(t;x)$ на решениях $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ системы (1).

Векторное произведение в n-мерном ($n\geq 3$) пространстве обладает теми же свойствами, что аналогичное произведение в 3-мерном. В n-мерном пространстве любой вектор $\vec{a}$, ортогональный множеству векторов $\vec{\tau}^{(1)},\ldots,\vec{\tau}^{(n-1)}$, будет определяться следующим образом ($\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ – ортонормированный базис в R^n):

$$\vec{a}=\tilde{\lambda}\cdot[\vec{\tau}^{(1)},\ldots,\vec{\tau}^{(n-1)}]\in\left\{\lambda\cdot\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n\\ \tau_1^{(1)} & \tau_2^{(1)} & \ldots & \tau_n^{(1)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \tau_1^{(n-1)} & \tau_2^{(n-1)} & \ldots & \tau_n^{(n-1)}\end{pmatrix},\ \lambda\in\mathrm{R}\right\}. \qquad (5)$$

Это произведение не равно нулю, если векторы $\vec{\tau}^{(1)},\ldots,\vec{\tau}^{(n-1)}$ линейно независимы. Если ввести в рассмотрение вместо векторов $\vec{\tau}^{(j)}$ обобщенные градиенты $\mathrm{W}u_j(t;\mathbf{x})$, то линейная независимость векторов $\vec{\tau}^{(j)}$, $j=\overline{1,n}$, расширенного фазового пространства R^{n+1} соответствует независимости первых интегралов – функций $u_j(t;\mathbf{x})$, $j=\overline{1,n}$ [8]. При условии гладкости правой части системы (1), общее количество ее независимых первых интегралов равно n. Множество независимых первых интегралов может содержать меньшее количество функций, чем размерность фазового пространства. В этом случае множество векторных функций, определяющих правую часть системы дифференциальных уравнений, обеспечивает вариативность. Это отражено в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть координаты функционального вектора* $A(t;\mathbf{x}(t))$ *удовлетворяют условиям существования и единственности решения уравнения* (1) *и все функции семейства независимых функций* $\{u_j(t;\mathbf{x})\}_{j=1}^{k}$ *имеют непрерывные частные производные по всем переменным.* Если система нелинейных дифференциальных уравнений (1) имеет k ≤ n, n ≥ 2 таких независимых первых интегралов $\left\{u_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{k}$, то в качестве правой части системы (1) можно взять множество векторных функций, определяемых из условия:

$$A(t;x) = (1, A^*(t;x) = \left\{\frac{1}{\det B(t;x)} \bullet \det H(t;x)\right\} \Big|_{f_j \in C^1,\, j=\overline{k+1,n}}, \tag{6}$$

$$H(t;\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \vec{e}_o & \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \\ \frac{\partial u_1(t;\mathbf{x})}{\partial t} & \frac{\partial u_1(t;\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(t;\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k(t;\mathbf{x})}{\partial t} & \frac{\partial u_k(t;\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_k(t;\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{k+1}(t;\mathbf{x})}{\partial t} & \frac{\partial f_{k+1}(t;\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{k+1}(t;\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(t;\mathbf{x})}{\partial t} & \frac{\partial f_n(t;\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(t;\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad B(t;\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(t;\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(t;\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k(t;\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_k(t;\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{k+1}(t;\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{k+1}(t;\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(t;\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(t;\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

где: $\mathrm{f_j} = \mathrm{f_j}(\mathrm{t},\mathbf{x})$, $j = \overline{k+1,n}$ – произвольные функции, имеющие непрерывные частные производные по всем переменным и составляющие вместе с множеством первых интегралов $\left\{u_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{k}$ систему независимых функций.

Доказательство. Пусть система (1) имеет k независимых первых интегралов $\left\{u_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{k}$ и $\vec{\tau}^{(j)}(t;\mathbf{x}) = \mathrm{W}u_j(t;\mathbf{x})$, $j = \overline{1,k}$. Возьмем множество $\left\{f_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=k+1}^{n} \in C^1(\mathrm{D})$ функций, составляющих с множеством $\left\{u_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{k}$ систему независимых функций. Введем векторное произведение в $(n+1)$-мерном пространстве с ортонормированным базисом $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – вектор $\vec{A}^o(t;\mathbf{x}) = \left[\vec{\tau}^{(1)}(t;\mathbf{x}), \dots, \vec{\tau}^{(n)}(t;\mathbf{x})\right]$ в виде определителя $\vec{A}^o(t;\mathbf{x}) = \det H(t;\mathbf{x})$, в первой строке которого – базисные векторы, строки со 2-й по $(k+1)$-ю состоит из координат обобщенных градиентов функций $\left\{u_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{k}$, остальные строки – координаты векторов $\mathrm{W}f_j(t,\mathbf{x})$, $j = \overline{k+1,n}$. В силу независимости $\left\{u_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{k}$ и $\left\{f_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=k+1}^{n}$ следует $\vec{A}^o(t;\mathbf{x}) \neq 0$. Поскольку на решениях $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ уравнения (1) $A(t;x) \perp Wu_j(t;x)$ для всех функций из

$\{u_j(t;\mathbf{x})\}_{j=1}^{k}$, то в силу (5) и с учетом (3) выполняется условие: $A(t;x)=\lambda' \cdot \vec{A}^{0}(t;x)=(1,a_1,a_2,..,a_n)^*$ Следовательно, $\lambda'=(\det L(t;\mathbf{x}))^{-1}$, где: $\det L(t;\mathbf{x})$ – алгебраическое дополнение элемента $\vec{e}_o$ определителя $\det H(t;\mathbf{x})$.

Введенные нами функции f_j, хотя нас, по сути, интересуют только их производные, а задание формулой – нет, можно также считать первыми интегралами, поскольку $A(t;x)\perp Wf_j(t;x)$. В дальнейшем полным набором первых интегралов будем называть множество, содержащее максимальное количество независимых первых интегралов системы уравнений. Он может состоять из заданных функций и дополнительных функций, определяемых в соответствии с теоремой 1.

Замечание 1. При рассмотрении задачи Коши для заданных начальных условий можно подобрать значение постоянной (параметра) C, где $u(t;\mathbf{x}(t))=u(t_0,\mathbf{x}_0)=C$ и наоборот, для данного значения параметра можно выбрать нужные начальные условия.

Теорема 2. *Пусть координаты функционального вектора* $A(t;\mathbf{x})$ *удовлетворяют условиям существования и единственности решения уравнения* (1) *и функции семейства* $\{u_j(t;\mathbf{x})\}_{j=1}^{n}$ *независимых функций имеют непрерывные частные производные по всем переменным.* Семейство $\{u_j(t;\mathbf{x})\}_{j=1}^{n}$ представляет собой полный набор независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений (1) тогда и только тогда, когда его правая часть принадлежит множеству векторных функций (6).

Доказательство. Утверждение в одну сторону доказано выше – теорема 1 ($k=n$). Докажем истинность утверждения в другую сторону. $\det H(t;\mathbf{x})$ можно рассматривать как векторное произведение линейно независимых векторов $Wu_j(t;\mathbf{x})$, $j=\overline{1,n}$, а это означает, что $\det H(t;\mathbf{x})\perp Wu_j(t;\mathbf{x})$ и, соответственно, $A(t;x(t))\perp Wu_j(t;x)$, для всех $j=\overline{1,n}$. Значит, и скалярное произведение этих векторов равно нулю, в том числе, например, и для функции $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$: $(A(t;x),Wu_j(t;x))\big|_{x=x(t)}=0.$ Тогда $\dfrac{\partial u_j(t;\mathbf{x}(t))}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u_j(t;\mathbf{x}(t))}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i(t)}{\partial t}=0$ или $du_j(t;\mathbf{x}(t))=0$. Это означает, что функция $u_j(t;\mathbf{x})$ – первый интеграл системы (1).

Предложенный в теореме 1 метод можно применить для построения системы ОДУ в пространстве, число координат которого превышает число координат, входящих в функцию, которую мы считаем первым интегралом строящейся системы ОДУ. Подобные задачи возникают, когда необходимо рассмотреть расширение системы в случае, если известны сохраняющиеся условия только на часть переменных, однако важно построить уравнение движения динамической системы в пространстве определенной размерности [9].

Теорема 3. *Пусть* $P_s\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_s)$ *– проекция вектора* $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$ *на подпространство* $\mathrm{R}^s \subseteq \mathrm{R}^n$ *и функции семейства* $\left\{u_j(t;P_s\mathbf{x})\right\}_{j=1}^k$, $k \le n$, *независимы, имеют непрерывные частные производные по всем переменным.* Тогда в качестве правой части $A(t;\mathbf{x}(t))$ системы ОДУ (1), для любого единственного решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ которой для каждой из функций $\left\{u_j(t;P_s\mathbf{x})\right\}_{j=1}^k$, $s \le n$, выпоняется условие $u_j\left(t;P_s\mathbf{x}(t)\right) = u_j(t_0,P_s\mathbf{x}_0)$, можно взять векторные функции из множества $A(t;x) = (1, A^*(t;x)^* = \left\{\dfrac{1}{\det L(t;x)} \cdot \det H(t;x)\right\} \Big|_{f_j \in C^1,\, j=\overline{k+1,n}}$, где $H(t;\mathbf{x})$– $(n+1)$–матрица, первая строка которой – ортонормированные векторы $\vec{e}_0,\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$; в строках со 2-й по $(k+1)$-ю: координаты векторов $\mathrm{W}\tilde{u}_j(t;\mathbf{x})$, $j=\overline{1,k}$; функции $\tilde{u}_j(t;\mathbf{x})$ определяются условием:

$$\tilde{u}_j(t;\mathbf{x}) = \tilde{u}_j(t;x_1,\dots,x_s,x_{s+1},\dots,x_n)\big|_{x_{s+1}=\dots=x_n\equiv 0} = \tilde{u}_j(t;x_1,\dots,x_s,0,\dots,0) = u_j(t;P_s\mathbf{x}),$$

в строках с $(k+2)$-й по $(n+1)$-ю: координаты векторов $\mathrm{W}f_\nu(t;\mathbf{x})$, $\nu = \overline{k+1,n}$, составляющих с множеством $\left\{\tilde{u}_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^k$ систему независимых функций; $\det L \neq 0$ – алгебраическое дополнение элемента $\vec{e}_0$ матрицы $H(t;\mathbf{x})$.

Доказательство. Каждую из функций $u_j(t;P_s\mathbf{x})$, определенную на $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^s$, расширим до функции $\tilde{u}_j(t;\mathbf{x})$, определенной на $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^n$, добавив недостающие координаты, приравненные к нулю. Для набора $\{\tilde{u}_j(t;\mathbf{x})\}_{j=1}^k$ функций на пространстве $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^n$ применим теорему 1. Получаем утверждение теоремы.

Системы стохастических ДУ с винеровским процессом

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ):

$$d\mathbf{x}(t) = A(t,\mathbf{x}(t))dt + B(t,\mathbf{x}(t))dw(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{7}$$

где: $\mathbf{x}(t) \in \mathrm{R}^n$ ($t \ge 0$) – случайный процесс; $w(t)$ – m-мерный винеровский процесс, $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{R}^n$ – заданный неслучайный вектор. Относительно функций-координат $a_i(t,\mathbf{x})$ и $b_{ij}(t,\mathbf{x})$ коэффициентов $A(t,\mathbf{x})$ и $B(t,\mathbf{x})$ будем предполагать, что они удовлетворяют условиям существования и единственности решения уравнения (7) [8] для любого начального момента времени и любого неслучайного начального условия.

Определение. *Неслучайную вещественную функцию* $u(t;\mathbf{x})$ *назовем первым интегралом системы стохастических дифференциальных уравнений* (7) (*в смысле определения В. А. Дубко*), *если она не равна постоянной и с вероятностью* 1 *на любой траектории решения системы* (7) *с неслучайным выходом, т. е.* $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, *принимает постоянное значение, зависящее только от* $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{R}^n$, $t_0 \ge 0$.

Пусть $u(t;\mathbf{x})$ – скалярная неслучайная функция, имеющая непрерывные частные производные по x до второго порядка включительно и первую непрерывную по t, является первым интегралом системы (7). Тогда стохастический дифференциал для случайного процесса $u(t;\mathbf{x}(t))$ определяется формулой Ито [8] и приводит к условию [1]: $du(t;\mathbf{x}(t))=0$. Уравнение (7) можно записать в виде следующей системы СДУ:

$$dx_i(t)=a_i(t,\mathbf{x}(t))dt+\sum_{l=1}^{m} b_{il}(t,\mathbf{x}(t))dw_l(t), \quad x_i(t_0)=x_i^o, \quad i=\overline{1,n}.$$

Чтобы такая функция $u(t;\mathbf{x})$ была первым интегралом системы (7) (в соответствии с теоремой 9.1 из [1]) необходимо и достаточно выполнения на всех траекториях решения $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ системы (7) условий:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{il}(t,\mathbf{x})\cdot\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}=0; \qquad \frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left[a_i(t,\mathbf{x})-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} b_{jk}(t,\mathbf{x})\cdot\frac{\partial b_{il}(t,\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}=0. \quad (a)$$

Через $u(t;\mathbf{x})$ будем обозначать произвольную функцию из набора, определяющего набор первых интегралов $\{u_j(t;\mathbf{x})\}$. Полный набор первых интегралов для системы СДУ (7) состоит не более, чем из $(n-1)$-й функций [1].

Часто приходится иметь дело с динамическими системами, подверженными случайным воздействиям, для которых происходит сохранение заданных функционалов только в некоторой области всего пространства [9]. В этом случае можно сформулировать результат, в некоторой мере аналогичный теореме 3.

Теорема 4. *Пусть* $P_s\,\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_s)$ – *проекция вектора* $\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n$ *на подпространство* $\mathrm{R}^s \subseteq \mathrm{R}^n$ *и каждая из независимых функций, составляющих семейство* $\left\{u_j(t;P_s\,\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{k}$, $k<n$, *сохраняет постоянное значение на любой траектории решения* $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ *уравнения* (7) *в области*

$D \subset R \times R^s$: $u_j\left(t;P_s\mathbf{x}(t)\right)=u_j(t_0,P_s\mathbf{x}_0)$ *и* $f_\nu(t;\mathbf{x})$, $\nu=\overline{k+1,n}$ *– произвольные дифференцируемые функции, составляющие систему независимых в совокупности функций вместе с функциями* $\tilde{u}_j(t;\mathbf{x})=\tilde{u}_j(t;x_1,\ldots,x_s,x_{s+1},\ldots,x_n)\big|_{x_{s+1}=\ldots=x_n\equiv 0}=\tilde{u}_j(t;x_1,\ldots,x_s,0,\ldots,0)=u_j(t;P_s\mathbf{x})$, $j=\overline{1,k}$.

Если $\tilde{u}_j(t;\mathbf{x})$ и $f_\nu(t;\mathbf{x})$ имеют непрерывные частные производные по t и дважды дифференцируемы по $\mathbf{x}$, тогда правая часть системы стохастических дифференциальных уравнений (7) может определяться множеством:

$$A(t;\mathbf{x}) \in \mathrm{A}(t;\mathbf{x}) = \left\{ R(t;\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}(B_l(t;\mathbf{x}),\nabla_x)B_l(t;\mathbf{x}) \right\}\Bigg|_{f_\nu \in C^1,\ \nu=\overline{k+1,n}}, \quad (8)$$

$$R(t;\mathbf{x}) = \left(r_1(t;\mathbf{x}),\ldots,r_n(t;\mathbf{x})\right)^*, \tilde{R}(t;\mathbf{x}) = C^{-1}(t;\mathbf{x})\cdot\det H(t;\mathbf{x}) = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i(t;\mathbf{x})\vec{e}_i,$$

где: $H(t;\mathbf{x})$ – (n+1)-матрица, первая строка которой – ортонормированные векторы $\vec{e}_0,\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$; в строках со 2-й по $(k+1)$-ю: координаты векторов $W\tilde{u}_j(t;\mathbf{x})$, в строках с $(k+2)$-й по (n+1)-ю: координаты векторов $Wf_\nu(t;\mathbf{x})$, $\nu=\overline{k+1,n}$: $Wf_\nu(t;\mathbf{x})=(f_{\nu,0},f_{\nu,1},\ldots,f_{\nu,n})$; $C(t;\mathbf{x})$ – алгебраическое дополнение элемента $\vec{e}_0$ матрицы $H(t;\mathbf{x})$; $B_l(t;\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{m}b_{il}(t;\mathbf{x})\cdot\vec{e}_i$ – столбцы матрицы $B(t;\mathbf{x})$:

$$B_l(t;\mathbf{x}) \in \mathrm{B}(t,\mathbf{x}) = \left\{q_{oo}(t;\mathbf{x})\cdot M_l(t;\mathbf{x})\right\}\Big|_{f_\nu \in C^1,\ \nu=\overline{k+1,n}}, \quad (9)$$

где: $M_l(t;\mathbf{x})$ – минор матрицы $H(t;\mathbf{x})$, соответствующий элементу $f_{n,0}$, $q_{oo}(t;\mathbf{x})$ – произвольная функция.

Доказательство. Введем расширение функций множества $\left\{u_j(t;P_s\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{k}$ на пространство $R \times R^n$: $\tilde{u}_j(t;\mathbf{x})=\tilde{u}_j(t;x_1,\ldots,x_s,x_{s+1},\ldots,x_n)\big|_{x_{s+1}=\ldots=x_n\equiv 0}=\tilde{u}_j(t;x_1,\ldots,x_s,0,\ldots,0)=u_j(t;P_s\mathbf{x})$, $j=\overline{1,k}$.

Дальнейшие рассуждения опираются на теорему 9.2 [1] и рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3.

Пусть случайные процессы $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} \in R^n$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tilde{\mathbf{x}} \in R^n$ ($t \geq 0$) – соответственно решения системы (7) и:

$$d\tilde{x}(t) = A(t,\tilde{x}(t))dt + B(t,\tilde{x}(t))dw(t), \qquad \tilde{x}(t_0) = x_0, \quad (10)$$

и $w(t)$ $-m$-мерный винеровский процесс. Коэффициенты уравнения (10) удовлетворяют условиям существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема 5. *Если для стохастических дифференциальных уравнений* (7) *и* (10) *семейство независимых функций* $\left\{u_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{\gamma}$, $\gamma \le n-1$, $u_t \in C$, $u_{x_i x_l} \in C^2$, *образует набор первых интегралов, тогда коэффициенты, стоящие в правых частях этих уравнений, принадлежат одному множеству функций* $A(t,x), A(t,\tilde{x}) \in A(t,x)$, *и* $B(t,x), B(t,\tilde{x}) \in B(t,x)$, *соответственно, где* $\mathrm{A}(t;\mathbf{x})$ – *множество векторных функций* (8), $\mathrm{B}(t,\mathbf{x})$ – *множество матричных функций вида* (9), *построенных по набору функций* $\left\{u_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{\gamma}$, $\gamma \le n-1$.

Доказательство. Пусть функция $u(t;\mathbf{x})$ – первый интеграл для систем уравнений (7) и (10), следовательно, должны одновременно выполняться условия (a) для процесса $\mathbf{x}(t)$ и условия:

$$\sum_{i=1}^{n} b'_{il}(t,\tilde{\mathbf{x}})\cdot\frac{\partial u(t,\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i}=0;\quad \frac{\partial u(t,\tilde{\mathbf{x}})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left[a'_i(t,\tilde{\mathbf{x}})-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} b'_{jl}(t,\tilde{\mathbf{x}})\cdot\frac{\partial b'_{il}(t,\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_j}\right]\frac{\partial u(t,\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i}=0 \quad (b)$$

для процесса $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Здесь $a'_i(t,\tilde{\mathbf{x}}(t))$ – элементы вектора $A(t,\tilde{x}(t))$, $b'_{il}(t,\tilde{\mathbf{x}}(t))$ – элементы матрицы $B(t,\tilde{x}(t))$. Тогда из первых условий из (a) и (b) следует:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{il}(t,\mathbf{x})\cdot\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}=0,\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} b'_{il}(t,\tilde{\mathbf{x}})\cdot\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}=0. \qquad (11)$$

Если каждое из уравнений системы (11) рассматривать, как скалярное произведение, и с учетом построения (9), то матрицы $B(t,\mathbf{x})$ и $B(t,x)$ совпадают с точностью до функционального множителя, поскольку они определяются только заданным набором функций $\left\{u_j(t;\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{\gamma}$, $\gamma \le n-1$, т. е. $\tilde{B}(t,\tilde{\mathbf{x}})=h(t;\mathbf{x})\cdot B(t,\mathbf{x})$, где $h(t;\mathbf{x})$ – произвольная, отличная от нуля функция. Пусть коэффициент $A(t,\mathbf{x})$ построен на основании формулы (8) теоремы 4. В силу $\tilde{B}(t,\tilde{\mathbf{x}})=h(t;\mathbf{x})\cdot B(t,\mathbf{x})$ построения $\det\tilde{H}(t;\tilde{\mathbf{x}})$ и, соответственно, $\det\tilde{C}(t;\tilde{\mathbf{x}})$ и свойств определителя, получаем, что $A(t,x), A(t,\tilde{x})$ принадлежат одному множеству. Следовательно, получаем утверждение теоремы.

Выводы

По заданному набору независимых дифференцируемых функций построен класс дифференциальных уравнений, для которых они есть первые интегралы.

Библиографические ссылки

1. *Дубко В. А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1989.
2. *Дубко В. А.* Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений: Препринт. – Киев: АН УССР, Ин-т математики, 1978.
3. *Еругин Н. П.* Построение всего множества дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. – ПММ. – Т. 16. – Вып. 6. – 1952.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.
5. *Чалых Е. В.* Построение множества программных управлений с вероятностью 1 для одного класса стохастических систем // Автоматика и телемеханика. – 2009. – Т. 70.– № 8.
6. *Чалых Е. В.* Об одном обобщении уравнений Ланжевена с детерминированным модулем скорости // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50. – № 7.
7. *Никольский С. М.* Курс математического анализа / 3-е изд., перераб. и доп. – Т. 1. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1983.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. Думка, 1968.
9. *В поисках скрытого порядка* (Методологические проблемы изучения региона) / В. А. Дубко, Ф. Н. Рянский, Э. М. Сороко, В. Н. Шолпо, В. В. Юшманов. – Владивосток: Дальнаука, 1995.