



УДК 338:001.891.573

© В. К. Булгаков, В. В. Стригунов, 2008

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ И ОПТИМАЛЬНЫХ
ТРАЕКТОРИЯХ ДИНАМИКИ РЕГИОНАЛЬНОЙ
МАКРОЭКОНОМИКИ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА
МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА**

Булгаков В. К. – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»;
Стригунов В. В. – асп. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ТОГУ)

На основе принципа максимума Понтрягина доказана теорема об оптимальном управлении в региональной макроэкономике. Сформулирована краевая задача для оптимальных траекторий фазовой и сопряженной переменных

On the basis of a Pontryagin's maximum principle the theorem of optimal control in regional macroeconomics is proved. The boundary value problem for optimal paths of the phase and conjugate variables is formulated.

Ключевые слова: математическая модель макроэкономике, производственная функция, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, оптимальные траектории

1. Введение

Пусть $w(t) = \frac{W(t)}{g(t)N(t)}$ – среднедушевое потребление, отнесенное к

среднегодовому доходу одного работника. Рассмотрим следующее множество \bar{W} функций $w(t)$ региональной макроэкономике, которое отражает экономически содержательный смысл [1]:

$$\bar{W} = \{w(t) \in C[0, T]: \pi_1 B(x(t)) \leq w(t) \leq \pi_2 B(x(t))\}. \quad (1)$$

Здесь

$$B(x) = b(1 - e^{-x}) + (1 - b)x \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right). \quad (2)$$

производственная В-функция [2], $x(t) = B \frac{\mu K(t)}{g(t) N(t)}$ – фазовая переменная, $0 < b < 1$, $B > 0$ – постоянные производственной В-функции (в частности, для экономики Хабаровского края $b = 0.814$, $B = 0.857$),

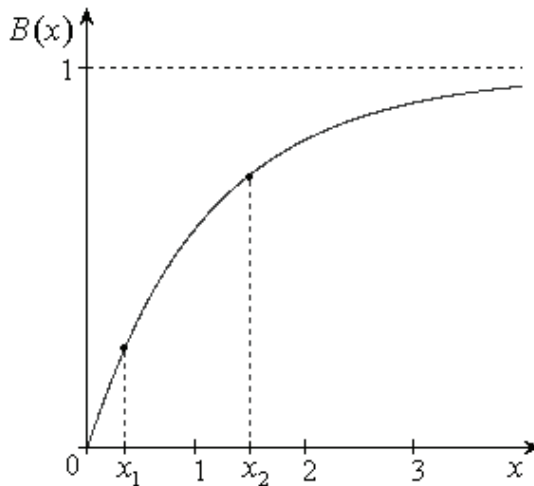


Рис. 1

$0 < \pi_1 < \pi_2$ – постоянные,
 $0 < T < \infty$ – конечный горизонт планирования.

Введем функцию управления регионального экономического процесса

$$u(t) = \frac{w(t)}{B(x(t))}, \quad (3)$$

где функция $B(x)$ – строго вогнутая на полупрямой $[0, \infty)$, имеет асимптоту $B(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ (рис. 1).

Начальное и конечное состояния экономической системы удовлетворяют неравенству

$0 < x_1, x_2 < \infty$. Для любого $t \in [0, T]$ $B(x(t)) > 0$. Учитывая (1), (3), введем множество функций допустимых управлений

$$\bar{U} = \{u(t) \in C[0, T]: u(t) \in \bar{R}\}. \quad (4)$$

Здесь \bar{R} – замкнутое множество значений функции управления $u(t)$, которое в нашем случае есть отрезок $[\pi_1, \pi_2]$, $\bar{R} = [\pi_1, \pi_2]$.

При использовании управления $u(t)$ уравнение для фазовой переменной $x(t)$, описывающее траекторию региональной экономической системы, имеет вид [1]

$$\frac{dx}{dt} = a_0 B(x) - \lambda x - p B(x) u. \quad (5)$$

Здесь $x(t) \in C^1[0, T]$; a_0, λ, p – постоянные > 0 .

2. Решение задачи об оптимальном управлении

Рассмотрим задачу нахождения оптимального управления – функции $u^*(t) \in \bar{U}$, которое переводит экономическую систему (5) из одного фиксированного состояния $x(0) = x_1$ в другое фиксированное состояние $x(T) = x_2$ при условии максимизации функционала благосостояния



$$J(u) = \int_0^T B^\alpha(x(t)) u^\alpha(t) dt. \quad (6)$$

Здесь α – постоянная, $0 < \alpha < 1$.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \max_{u(t) \in \bar{U}} \int_0^T B^\alpha(x(t)) u^\alpha(t) dt \\ \frac{dx}{dt} = a_0 B(x) - \lambda x - p B(x) u \\ x(0) = x_1, \quad x(T) = x_2 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Заметим, что момент времени T (горизонт планирования) заранее не задан. Обозначим через $\psi(t)$ сопряженную переменную к фазовой переменной $x(t)$.

Функция Гамильтона задачи (7) имеет вид

$$H(x, \psi, u) = B^\alpha(x) u^\alpha + \psi [a_0 B(x) - \lambda x - p B(x) u], \quad (8)$$

гамильтонова система уравнений есть

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = a_0 B(x) - \lambda x - p B(x) u \\ \frac{d\psi}{dt} = -\psi [a_0 B'(x) - \lambda] + [\psi p u - \alpha B^{\alpha-1}(x) u^\alpha] B'(x) \\ x(0) = x_1, \quad x(T) = x_2 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где $\psi(t) \in C^1[0, T]$.

Решение задачи (7) получим на основе принципа максимума Понтрягина [3, 4], “основным содержанием которого” – Л. С. Понтрягин – является следующий факт. Если $u^*(t)$ – оптимальное управление задачи (7), а $x^*(t)$, $\psi^*(t)$ – соответствующие ему оптимальные траектории системы (9), то функция Гамильтона (8) удовлетворяет равенству

$$H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) = \sup_{u \in \bar{R}} H(x^*(t), \psi^*(t), u). \quad (*)$$

Исследуем функцию Гамильтона (8). Рассмотрим на положительном ортанте $R_+^2(\psi, x)$ плоскости сопряженной и фазовой переменных область $\bar{\Omega}(\psi, x) = \{ \psi, x : \psi_{\min} \leq \psi \leq \psi_{\max}, x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \}$. Здесь отрезок $[x_{\min}, x_{\max}]$ содержит все возможные реальные начальные и конечные состояния x_1, x_2 региональных экономических систем, а отрезок

$[\psi_{\min}, \psi_{\max}]$ все значения переменной $\psi(t)$ краевой задачи (9) при допустимых управлениях $u(t) \in \bar{U}$. Очевидно также, что отрезок $[x_{\min}, x_{\max}]$ содержит все значения фазовой переменной $x(t)$, определяемые краевой задачей (9) при $u(t) \in \bar{U}$.

Рассмотрим открытую область $\Psi(\psi, x) \subset \bar{\Omega}(\psi, x)$ значений переменных $\psi(t)$, $x(t)$ для случая, когда допустимые управления $u(t) \in U$ – внутренности множества \bar{U} . Заметим, что области $\Psi(\psi, x)$ соответствует открытое множество значений управлений $R = (\pi_1, \pi_2)$. Для открытого множества U рассматриваемая оптимальная задача эквивалентна задаче Лагранжа классического вариационного исчисления [3]. Для каждой точки $(\psi, x) \in \Psi$ точка максимума $u^* \in R$ является стационарной точкой функции Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Откуда получаем, что при любых фиксированных $(\psi, x) \in \Psi$ имеет место зависимость

$$B^\alpha(x) \alpha u^{*\alpha-1} - \psi p B(x) = 0, \quad \text{где } u^* \in R, \quad (10)$$

или так как $B(x) > 0$

$$\psi = \frac{\alpha}{p} \frac{1}{u^{*1-\alpha}} \frac{1}{B^{1-\alpha}(x)}. \quad (11)$$

Рассмотрим функции

$$\psi_1(x) = \frac{c_2}{B^{1-\alpha}(x)}, \quad \psi_2(x) = \frac{c_1}{B^{1-\alpha}(x)}, \quad c_i = \frac{\alpha}{p(\pi_i)^{1-\alpha}}, \quad (i=1, 2) \quad (12)$$

на отрезке $[x_{\min}, x_{\max}]$.

На рис. 2 показана область $\bar{\Omega}(\psi, x)$ и расположенные на ней графики функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$.

Из уравнений (11), (12) нетрудно видеть, что $\forall x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ при $\psi \rightarrow \psi_{1+}(x)$, $u^* \rightarrow \pi_2$, а при $\psi \rightarrow \psi_{2-}(x)$, $u^* \rightarrow \pi_1$, т.е. внутри границ $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ находится область Ψ . На рис. 2 показаны также области Ψ_1 , Ψ_2 дополняющие Ψ до области $\bar{\Omega}(\psi, x)$. Точки границы $\psi_1(x) \in \Psi_1$, границы $\psi_2(x) \in \Psi_2$.

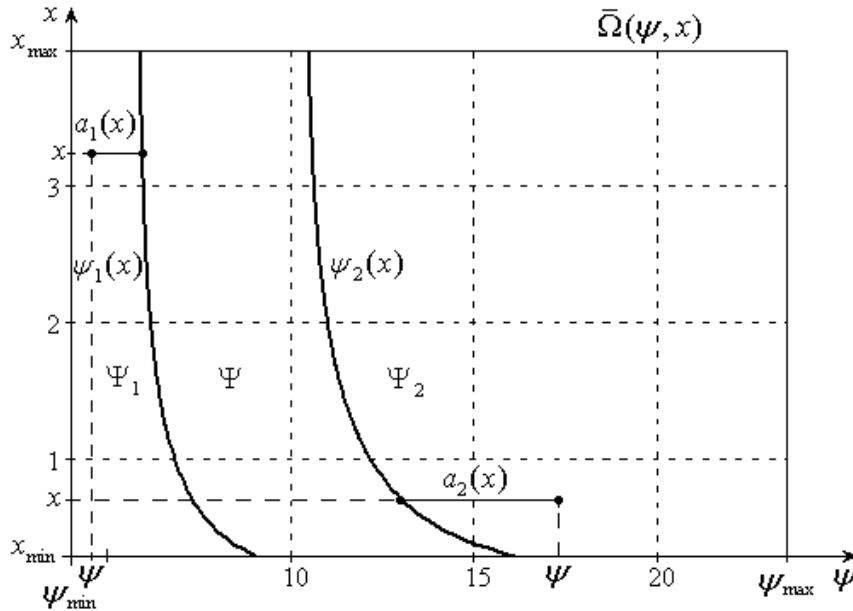


Рис. 2

Запишем условие стационарности (10) в виде

$$u^* = \frac{1}{B(x)} \pi \psi^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \pi = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \text{где } u^* \in R. \quad (13)$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \alpha(\alpha - 1) B^\alpha(x) u^{*\alpha-2} < 0.$$

Следовательно, при любых фиксированных $(\psi, x) \in \Psi$ управление (13) доставляет максимум функции Гамильтона (8) на множестве R .

Рассмотрим область Ψ_1 . Пусть (ψ, x) – произвольная фиксированная точка множества Ψ_1 (ψ, x – постоянные). Представим $\psi = \psi_1(x) - a_1(x)$ (см. рис. 2). Функция Гамильтона в рассматриваемой точке равна

$$\begin{aligned} H(x, \psi, u) &= B^\alpha(x) u^\alpha - \psi_1(x) p B(x) u + a_1(x) p B(x) u + \psi [a_0 B(x) - \lambda x] = \\ &= B^\alpha(x) u^\alpha - \frac{c_2}{B^{1-\alpha}} B(x) p u + a_1(x) p B(x) u + \psi [a_0 B(x) - \lambda x] = \\ &= \gamma_1(u) + \omega_1(u) + \psi [a_0 B(x) - \lambda x], \end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma_1(u) = B^\alpha(x) u^\alpha \left[1 - \alpha \left(\frac{u}{\pi_2}\right)^{1-\alpha}\right], \quad \omega_1(u) = a_1(x) p B(x) u, \quad u \in \bar{R}.$$

Анализ функции $\gamma_1(u)$ (производных $\gamma_{1u}, \gamma_{1uu}$) показывает, что $\gamma_1(u)$ имеет максимум при $u = \pi_2$. Функция $\omega_1(u)$ также имеет максимум при $u = \pi_2$, или равна нулю в точках границы $\Psi_1(x)$.

Таким образом, при любых фиксированных $(\psi, x) \in \Psi_1$ управление $u^* = \pi_2$ доставляет максимум функции Гамильтона $H(x, \psi, u)$ (8).

Аналогично, рассмотрев $H(x, \psi, u)$ в произвольной фиксированной точке $(\psi, x) \in \Psi_2$, представив $\psi = \psi_2(x) + a_2(x)$ (см. рис. 2), можем записать

$$\begin{aligned} H(x, \psi, u) &= B^\alpha(x)u^\alpha - p\psi_2(x)B(x)u - pa_2(x)B(x)u + \psi[a_0B(x) - \lambda x] = \\ &= \gamma_2(u) + \omega_2(u) + \psi[a_0B(x) - \lambda x], \end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma_2(u) = B^\alpha(x)u^\alpha \left[1 - \alpha \left(\frac{u}{\pi_1} \right)^{1-\alpha} \right], \quad \omega_2(u) = -a_2(x)pB(x)u, \quad u \in \bar{R}.$$

Проведя анализ функций $\gamma_2(u), \omega_2(u)$, также убеждаемся, что при любых фиксированных $(\psi, x) \in \Psi_2$ управление $u^* = \pi_1$ доставляет максимум функции Гамильтона $H(x, \psi, u)$ (8).

Так как $\Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2 = \Omega(\psi, x)$, то нами рассмотрена вся область значений фазовой и сопряженной переменных, вся область значений функции управления \bar{R} и найдено, что максимум функции Гамильтона $H(x, \psi, u)$ имеет место при любых фиксированных $(\psi, x) \in \Omega$ на управлениях

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \pi_2, \quad \text{если } (\psi, x) \in \Psi_1 \\ u^* &= \frac{1}{B(x)} \pi \psi^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \text{если } (\psi, x) \in \Psi \\ u^* &= \pi_1, \quad \text{если } (\psi, x) \in \Psi_2 \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Обозначим через $u^*(t), x^*(t), \psi^*(t)$ траекторию оптимального управления задачи (7), соответствующие ему оптимальные траектории фазовой и сопряженной переменной. Траектории $x^*(t), \psi^*(t)$ определяются краевой задачей



$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} &= a_0 B(x^*(t)) - \lambda x^*(t) - p B(x^*(t)) u^*(t) \\ \frac{d\psi^*}{dt} &= -\psi^*(t) [a_0 B'(x^*(t)) - \lambda] + \\ &\quad + [p \psi^*(t) u^*(t) - \alpha B^{\alpha-1}(x^*(t)) u^{*\alpha}(t)] B'(x^*(t)) \\ x^*(0) &= x_1, \quad x^*(T) = x_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Из соотношений (14) для оптимальных траекторий $u^*(t)$, $x^*(t)$, $\psi^*(t)$ следует зависимость

$$u^*(t) = \begin{cases} \pi_2 & \text{при } \psi^*(t) \leq \psi_1(x^*(t)) \\ \frac{\pi}{B(x^*(t))} \psi^{*\frac{1}{1-\alpha}}(t) & \text{при } \psi_1(x^*(t)) < \psi^*(t) < \psi_2(x^*(t)) \\ \pi_1 & \text{при } \psi^*(t) \geq \psi_2(x^*(t)) \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, на основании принципа максимума Понтрягина (“основное равенство” (*)) получен результат, который можно подытожить следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть $u^*(t) \in \bar{U}$ – оптимальное управление задачи (7), а $x^*(t)$, $\psi^*(t)$ – соответствующие ему решения гамильтоновой системы (15). Тогда между оптимальным управлением $u^*(t)$, соответствующими ему оптимальными траекториями фазовой и сопряженной переменных $x^*(t)$, $\psi^*(t)$ имеет место зависимость (16).

Замечание. Выше было показано, что $\forall x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ $\lim_{\psi \rightarrow \psi_{1+}(x)} u^* = \pi_2$, $\lim_{\psi \rightarrow \psi_{2-}(x)} u^* = \pi_1$. Учитывая, что при $\psi \leq \psi_1(x)$ $u^* = \pi_2$, а при $\psi \geq \psi_2(x)$ $u^* = \pi_1$, приходим к выводу, что $\forall x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ функция $u^*(\psi)$ непрерывная на $[\psi_{\min}, \psi_{\max}]$. Из соотношений (16) с учетом того, что траектории $x^*(t)$, $\psi^*(t) \in C^1[0, T]$, а функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ достаточно гладкие на отрезке $[x_{\min}, x_{\max}]$ (см. формулы (12), (2)) следует, что оптимальное управление $u^*(t)$ – непрерывная функция на отрезке $[0, T]$ как в случае $x_1 < x_2$, так и для варианта $x_1 > x_2$.

3. Запись краевой задачи оптимального управления в форме, удобной для разработки алгоритма решения на ЭВМ

Подставляя оптимальное управление (16) в краевую задачу (15), запишем ее в форме, удобной для построения алгоритма решения на ЭВМ.

Введем следующие параметры модели: $p = \mu B$, $a_0 = pqC_\infty$,

$$\pi = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \lambda = \mu + \nu + \tau, \quad \gamma_0 = \frac{\lambda}{a_0}, \quad \sigma = \frac{1}{a_0} \left[\frac{\alpha}{p^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad c_0 = \sigma^{1-\alpha},$$

$$a_1 = a_0 \left(1 - \frac{\pi_1}{qC_\infty}\right), \quad \gamma_1 = \frac{\lambda}{a_1}, \quad n_1 = \frac{\alpha \pi_1^\alpha}{a_1}, \quad a_2 = a_0 \left(1 - \frac{\pi_2}{qC_\infty}\right), \quad \gamma_2 = \frac{\lambda}{a_2},$$

$$n_2 = \frac{\alpha \pi_2^\alpha}{a_2}, \quad \eta_0 = \frac{1}{a_0}, \quad \eta_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \eta_2 = \frac{1}{a_2}.$$

Звездочки у оптимальных траекторий $u^*(t)$, $x^*(t)$, $\psi^*(t)$ в дальнейшем для простоты опустим. Тогда систему уравнений (16), определяющую оптимальные траектории $x(t)$, $\psi(t)$, можно записать в следующей форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, \psi) \\ \frac{d\psi}{dt} &= G(x, \psi) \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Здесь

$$F(x, \psi) = \begin{cases} a_2 (B(x(t)) - \gamma_2 x(t)) & \text{при } \psi(t) \leq \psi_1(x(t)) \\ a_0 \left(B(x(t)) - \gamma_0 x(t) - \sigma \psi^{-\frac{1}{1-\alpha}}(t) \right) & \text{при } \psi_1(x(t)) < \psi(t) < \psi_2(x(t)), \\ a_1 (B(x(t)) - \gamma_1 x(t)) & \text{при } \psi(t) \geq \psi_2(x(t)) \end{cases}$$

$$G(x, \psi) = \begin{cases} -a_2 \left[\psi(t) (B'(x(t)) - \gamma_2) + n_2 \frac{B'(x(t))}{B^{1-\alpha}(x(t))} \right] & \text{при } \psi(t) \leq \psi_1(x(t)) \\ -a_0 \psi(t) [B'(x(t)) - \gamma_0] & \text{при } \psi_1(x(t)) < \psi(t) < \psi_2(x(t)) \\ -a_1 \left[\psi(t) (B'(x(t)) - \gamma_1) + n_1 \frac{B'(x(t))}{B^{1-\alpha}(x(t))} \right] & \text{при } \psi(t) \geq \psi_2(x(t)) \end{cases}.$$

Нам понадобится также следующая, эквивалентная системе (17),



система уравнений, в которой в качестве независимой переменной взята сопряженная переменная ψ , а в качестве функций – фазовая переменная x и время t

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\psi} &= \varphi(x, \psi) \\ \frac{dt}{d\psi} &= \chi(x, \psi) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Здесь

$$\varphi(x, \psi) = \begin{cases} -\frac{B(x) - \gamma_2 x}{\psi(B'(x) - \gamma_2) + n_2 \frac{B'(x)}{B^{1-\alpha}(x)}} & \text{при } \psi \leq \psi_1(x) \\ -\frac{B(x) - \gamma_0 x - \sigma \psi^{-\frac{1}{1-\alpha}}}{\psi(B'(x) - \gamma_0)} & \text{при } \psi_1(x) < \psi < \psi_2(x) \\ -\frac{B(x) - \gamma_1 x}{\psi(B'(x) - \gamma_1) + n_1 \frac{B'(x)}{B^{1-\alpha}(x)}} & \text{при } \psi \geq \psi_2(x) \end{cases},$$

$$\chi(x, \psi) = \begin{cases} -\frac{\eta_2}{\psi(B'(x) - \gamma_2) + n_2 \frac{B'(x)}{B^{1-\alpha}(x)}} & \text{при } \psi \leq \psi_1(x) \\ -\frac{\eta_0}{\psi(B'(x) - \gamma_0)} & \text{при } \psi_1(x) < \psi < \psi_2(x) \\ -\frac{\eta_1}{\psi(B'(x) - \gamma_1) + n_1 \frac{B'(x)}{B^{1-\alpha}(x)}} & \text{при } \psi \geq \psi_2(x) \end{cases}.$$

4. Некоторые результаты расчетов

Рассмотрим некоторые результаты расчетов оптимального управления экономикой организаторами производственного процесса региона (на примере Хабаровского края).

Параметры зависимости (4), определяющие область допустимых значений функции управления $u(t)$, приняты равными $\pi_1 = 2.73675$, $\pi_2 = 10.50912$.

Вычисления параметров систем дифференциальных уравнений (17), (18) дали значения: $a_0 = 0.6558$, $\pi = 3601.6$, $\gamma_0 = 0.1914$,

$\sigma = 329.507$, $c_0 = 5.6932$, $a_1 = 0.4916$, $\gamma_1 = 0.2553$, $n_1 = 2.881$,
 $a_2 = 0.0253$, $\gamma_2 = 4.967$, $n_2 = 143.7618$, $\eta_0 = 1.5248$, $\eta_1 = 2.0341$,
 $\eta_2 = 39.5776$.

Рассмотрим результаты расчетов оптимального управления $u^*(t)$ и соответствующих ему оптимальных траекторий фазовой $x^*(t)$ и сопряженной $\psi^*(t)$ переменных, оптимального потребления $w^*(t)$ для случая А: $x_{\min} \leq x_1 < x_2 < x_s$.

Исходные данные вариантов x_1 , x_2 , рассчитанные значения сопряженной переменной ψ_1 , ψ_2 , интеграла благосостояния, времени перехода из состояния x_1 в состояние x_2 приведены в таблице.

Данные расчетов

Вариант	x_1	x_2	ψ_1	ψ_2	J	T
1	0.33	1.585304	23.596304	7.087574	111.49	39.17
2	0,33	1,4	23,432188	7,103178	19,24	9,92
3	0,33	1,2	22,827570	7,161670	12,84	7,44
4	0,33	1,0	21,658529	7,279479	9,05	5,74
5	0,33	0,8	19,745293	7,487083	6,19	4,25

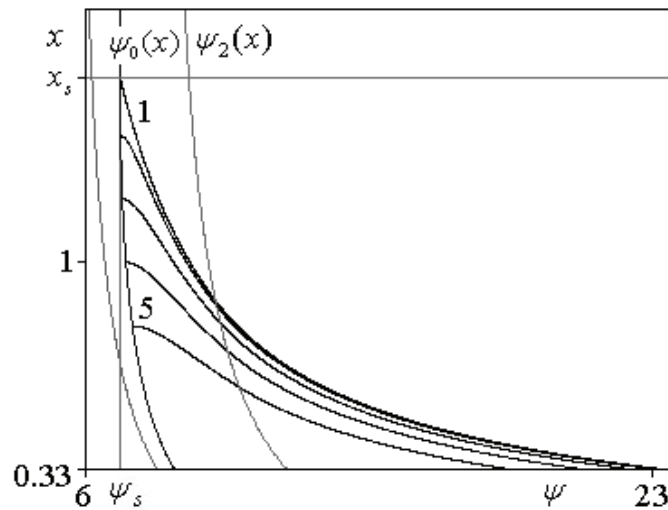


Рис. 3

На рис. 3 в плоскости ψ , x показаны оптимальные траектории $x^*(\psi)$ между начальным (ψ_1, x_1) и конечным (ψ_2, x_2) состояниями экономической системы. Номера кривых соответствуют номерам вариантов в таблице.



На рис. 4 показаны оптимальные траектории как функции времени $x^*(t)$ между начальным и конечным состояниями системы. Как следует из таблицы и кривых рис. 4, конечное состояние достигается за времена $T_1 = 39.17$ года, $T_2 = 9.92$ лет, $T_3 = 7.44$ года, $T_4 = 5.74$ года, $T_5 = 4.25$ года.

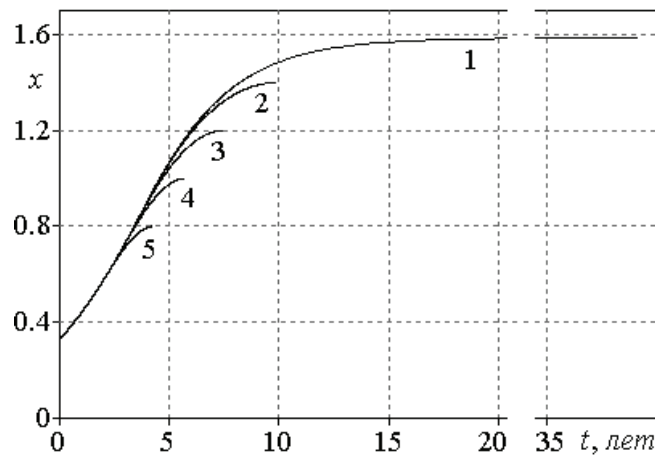


Рис. 4

На рис. 5 представлены оптимальные траектории сопряженной переменной $\psi^*(t)$ между начальным и конечным состояниями системы для вариантов 1–5 таблицы.

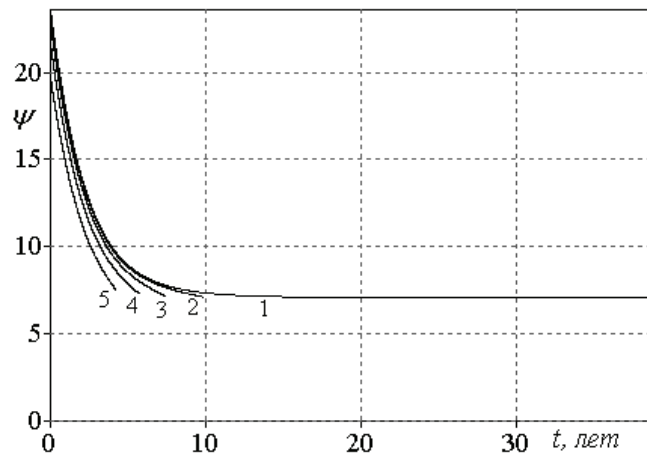


Рис. 5

На рис. 6 и 7 представлены оптимальные траектории управления $u^*(t)$ и соответствующие ему оптимальные траектории потребления $w^*(t) = B(x^*(t))u^*(t)$ для вариантов 1–5 таблицы.

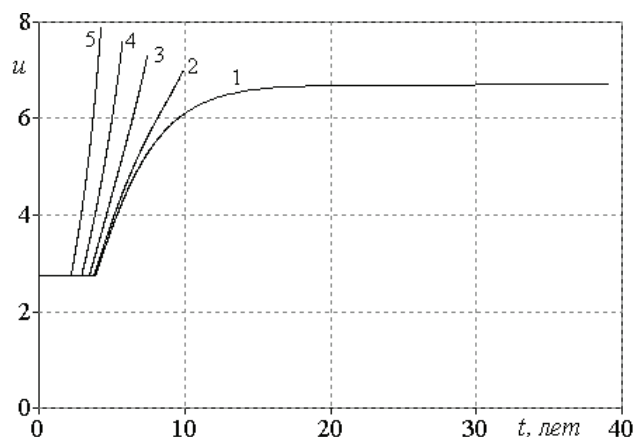


Рис. 6

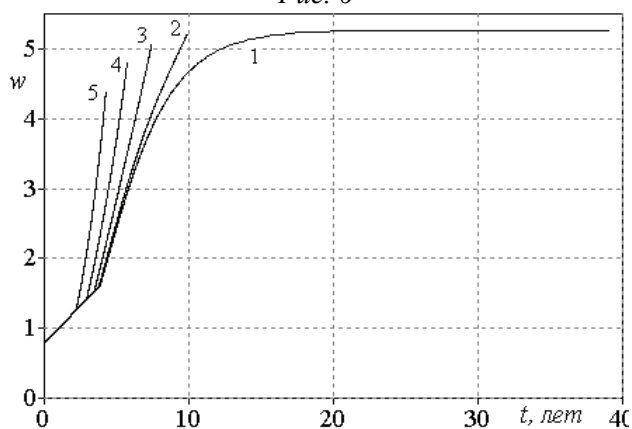


Рис. 7

Таким образом, в статье доказана теорема об оптимальном управлении в региональной макроэкономике, сформулирована краевая задача, определяющая оптимальные траектории фазовой и сопряженной переменных, приведены результаты численных расчетов оптимального управления и соответствующих ему оптимальных траекторий фазовой и сопряженной переменных, оптимального потребления.

Библиографические ссылки

1. Булгаков В. К., Стригунов В. В. Исследование одной математической модели макроэкономики региона РФ, решение задачи оптимального управления. Хабаровск, 2006.
2. Булгаков В. К., Булгаков О. В. Моделирование динамики обобщающих показателей развития региональных экономических систем России // Экономика и мат. методы. 2006. № 1. Т. 42.
3. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин и др. М., 1976.
4. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. М., 1988. Т. II.