



УДК 681.5.015

© А. Ю. Воронов, В. А. Герасимов, 2011

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ ПЛАЗМАТРОНА

*Воронов А. Ю.* – асп. каф. «Электрооборудование, автоматизация и технологии», тел. 8-914-704-88-64, e-mail: voronov86@mail.ru; *Герасимов В. А.* – канд. техн. наук, проф. каф. «Электрооборудование, автоматизация и технологии», тел. 8-902-522-38-24, e-mail: fobos\_v@mail.ru (ДВГТУ)

При моделировании системы автоматического регулирования тока дуги возникает задача получения математической модели объекта регулирования системы – сжатой электрической дуги в канале плазматрона. В статье приведены обоснования структуры математической модели дуги, методика ее получения и выполнено сопоставление математической модели с реальным объектом.

In modeling electrical arc current control system a problem arises of deriving a mathematic model of compressed electrical arc inside plasmatron channel. The article considers substantiation of the structure of the mathematic arc model, its derivation procedure, and comparison of the mathematic model with a real object.

*Ключевые слова:* плазма, плазматрон, электрическая дуга, математическое моделирование, случайные процессы, спектральная плотность.

### Введение

Анализируя возможные физико-химические методы воздействия на горючие смеси с позиции качественного воспламенения, можно прийти к выводу, что применение струи низкотемпературной плазмы имеет ряд преимуществ. Однако на пути широкого внедрения плазменного розжига встают такие проблемы, как отсутствие требуемых плазматронов и необходимость разработки специализированных источников питания плазменной струи.

Наилучшим вариантом реализации источника питания плазменной струи является замкнутая система автоматического регулирования (САР) с обратной связью по току [1]. Объектом регулирования САР тока в дуговом промежутке является сжатая электрическая дуга в канале плазматрона. Процессы, происходящие на этом объекте, имеют преимущественно случайный характер, и от точности их математического описания зависит качество рас-

чета параметров остальных элементов САР. Поэтому идентификация сжатой электрической дуги в канале плазматрона, как объекта регулирования САР, представляется важной самостоятельной задачей.

Основными целями данной работы являются определение структуры математической модели сжатой дуги и разработка методики нахождения параметров ее математической модели.

### Структура математической модели дуги

Можно выделить два основных метода моделирования дугового промежутка. Первый метод, полевой, основан на исследовании физических процессов, происходящих на дуге, и описании их уравнениями с частными производными [2]. Это приводит к необходимости решения системы дифференциальных уравнений в частных производных для дуговой плазмы. В сочетании с уравнениями электрической цепи, это представляет нелегкую, а порой и неразрешимую задачу. Учитывая сложность происходящих на сжатой дуге процессов, полевой метод можно признать нерациональным.

Второй метод, цепной, базируется на идентификации объекта по опытными данными. По своей сути он является интегральным, объект исследования в нем представляется в виде совокупности блоков, модулей или звеньев. Цепной метод позволяет строить схемы замещения процессов (синтез) и вести их исследование (анализ) [3]. Такой подход удобен при исследовании динамических свойств электрической дуги. Так как наибольшую сложность вызывает нахождение именно ее динамических характеристик, математическое моделирование сжатой электрической дуги в канале плазматрона целесообразно выполнить цепным методом.

Выбор структуры математической модели осуществляется на основании анализа осциллограмм тока и напряжения на сжатой электрической дуге. С целью их получения были проведены соответствующие эксперименты. С помощью высоковольтного источника напряжения ( $\approx 530 В$ ) и балластного резистора был создан источник питания плазматрона с крутопадающей вольтамперной характеристикой. В плазматрон подавался плазмообразующий газ (воздух), а дуговой разряд в канале плазматрона инициировался кратковременным контактным замыканием дугового промежутка. Путем изменения сопротивления балластного резистора производилась установка среднего значения тока дуги, что позволило снять ряд осциллограмм токов и напряжений на дуге [1].

Рассчитанные по данным цифровой обработки осциллограмм средние значения токов и напряжений позволяют найти статическую вольтамперную характеристику сжатой электрической дуги. По ней возможно построение ее статической математической модели. Вместе с тем для качественного моделирования всех процессов, происходящих в дуговом промежутке, необходимо также учитывать его динамические свойства [4]. Следовательно, структуру математической модели сжатой электрической дуги в канале плазматрона целесообразно представить в виде двух звеньев, сигналы на выходе которых



суммируются. Эти сигналы соответствуют среднему значению напряжения на дуге (статическая составляющая) и пульсациям напряжения (динамическая составляющая) [3]. Оба сигнала на выходе звеньев являются функцией тока, протекающего через дуговой промежуток.

В соответствии со статической вольтамперной характеристикой электрической дуги, на уровне качественной оценки ее можно представить в виде дифференциального сопротивления  $R_d = f(I)$  или, что более удобно и наглядно, в виде противоЭДС  $U_{CT} = f(I)$  [5]. Переменную составляющую напряжения на дуге можно представить в виде источника напряжения  $U_{дин}$ , который может быть включен как согласно, так и встречно с источником  $U_{CT}$ .

### Методика расчета математической модели дуги

Статическая вольтамперная характеристика электрической дуги в области малых токов представляет собой практически прямую линию. Зависимость  $U_{CT} = f(I)$  для используемого в опытах плазматрона при выбранном расходе воздуха легко находится на основании рассчитанной статической вольтамперной характеристики [6]:

$$U_{CT} = 192 - 9,9I, \text{ В.} \quad (1)$$

Выявление динамической составляющей модели представляет собой более сложную задачу. Так как процессы, происходящие на сжатой дуге, носят преимущественно случайный характер, при нахождении динамической составляющей модели дуги возможно использование методов, позаимствованных из теории случайных процессов в системах автоматического управления. В данном случае ее целесообразно представить в виде некоторого возмущающего воздействия, пропущенного через одно звено или ряд последовательно соединенных звеньев определенной структуры [3].

Спектральная плотность является одной из важнейших характеристик случайных процессов. По своему физическому смыслу она характеризует распределение энергии сигнала по спектру частот. Поэтому именно спектральную плотность изменяющегося напряжения на дуге можно считать той характеристикой, воспроизведение которой на математической модели с максимальной точностью обеспечит адекватность модели реальному объекту [7]. Случайный характер изменяющегося напряжения на дуге говорит о наличии непериодической составляющей в исследуемом сигнале, следовательно, спектральная плотность изменяющегося напряжения представляет собой непрерывную функцию, которая также может содержать отдельные пики [8].

Из теории случайных процессов в системах автоматического управления известно, что при прохождении случайного сигнала через линейное звено (формирующий фильтр) спектральные плотности сигналов на входе и выходе этого звена связаны формулой:

$$S_{вых}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_{вх}(\omega), \quad (2)$$

где:  $\omega$  – круговая частота,  $S_{\text{вых}}(\omega)$  и  $S_{\text{вх}}(\omega)$  – спектральные плотности сигналов на выходе и на входе фильтра соответственно, а  $W(j\omega)$  – частотная передаточная функция формирующего фильтра [9].

В данном случае сигнал на выходе линейного звена – это динамическая составляющая математической модели дуги. Ее спектральная плотность должна быть идентична спектральной плотности реального исследуемого сигнала, которая находится в результате цифровой обработки осциллограмм. При использовании в качестве возмущающего воздействия белого шума, имеющего единичную спектральную плотность, формула (2) принимает вид:

$$S_{\text{вых}}(\omega) = |W(j\omega)|^2. \quad (3)$$

Нахождение спектральной плотности возможно прямым и косвенным методами. При использовании прямого метода спектральная плотность рассчитывается непосредственно по данным цифровой обработки осциллограмм с помощью, например, быстрого преобразования Фурье. Второй метод, косвенный, основан на предварительном вычислении корреляционной функции и применении к ней преобразования Фурье. Этот метод обладает некоторыми преимуществами по сравнению с первым, поэтому именно его наиболее целесообразно использовать для расчета спектральной плотности [10, 11].

Корреляционная функция  $R(\tau)$  рассчитывается по приближенной формуле:

$$R(\tau) \approx \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} U_n U_{n+m}, \quad (4)$$

где:  $m$  – текущее значение шагов или минимальных интервалов  $\Delta_\tau$  ( $\tau = \Delta_\tau m$ ),  $N = T/\Delta_\tau$  – общее число интервалов, на которое разбита реализация случайной стационарной функции на интервале записи сигнала  $T$  [10].

Спектральная плотность, представляющая энергетический частотный спектр случайного процесса, одновременно является частотным спектром корреляционной функции этого процесса [8]. То есть корреляционная функция и спектральная плотность представляют собой взаимные преобразования Фурье. Так как корреляционная функция является четной вещественной функцией, спектральная плотность определяется выражением:

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\tau\omega) d\tau. \quad (5)$$

График найденной косвенным методом спектральной плотности переменной составляющей напряжения на реальной дуге представлен на рис. 1 (непрерывная линия). Цена деления по оси спектральной плотности составляет 1, а по оси частоты – 2000 рад/с.

Анализ рис. 1 показывает, что существенное влияние на вид изменяющегося напряжения на дуге оказывают гармоники с частотами до 2000 рад/с. Видно также постепенное затухание амплитуды гармоник с ростом частоты. При расчете использовались данные цифровой обработки осциллограммы напряжения на дуге за вычетом среднего значения напряжения. Расчет про-



изводился в дискретной форме. Сглаживание графика спектральной плотности выполнялось с использованием окна Гаусса [12].

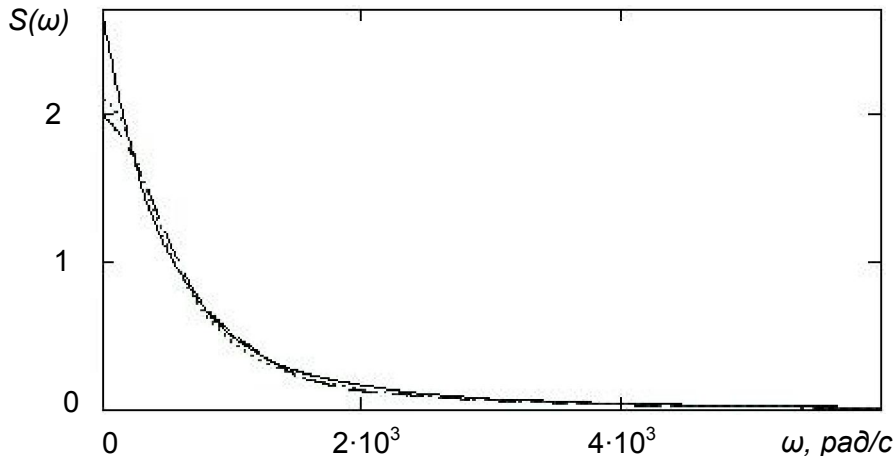


Рис. 1. Спектральная плотность изменяющегося напряжения на реальной дуге (непрерывная линия), в математической модели (штриховая линия) и гладкого реального белого шума (пунктирная линия) при среднем значении тока 5 А

По найденной спектральной плотности согласно формуле (3) можно рассчитать модуль частотной передаточной функции фильтра (АЧХ фильтра). Прогнозируя возможные варианты его реализации, структуру фильтра целесообразно выполнить в виде одного или нескольких последовательно соединенных типовых звеньев. Сопоставление полученного фильтра с типовыми структурами наиболее наглядно возможно произвести с помощью ЛАЧХ [13]. Рассчитанная ЛАЧХ представлена на рис. 2 (непрерывная линия).

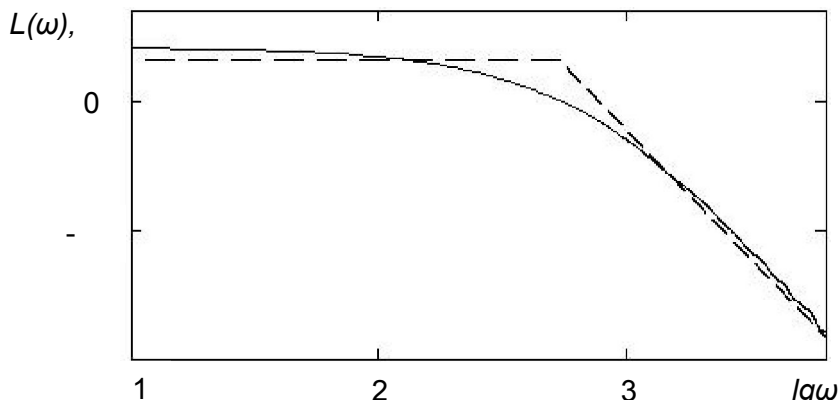


Рис. 2. ЛАЧХ фильтра в дискретном (непрерывная линия) и аппроксимированном (штриховая линия) виде при среднем значении тока 5 А

Проанализировав полученную ЛАЧХ, можно отметить ряд закономерностей. Для этого необходимо разбить всю область частот на два участка. К первому участку относятся те частоты, на которые приходятся максимальные значения спектральной плотности. Хотя найденные значения ЛАЧХ в этой области и уменьшаются с ростом частоты, эта тенденция не выражена здесь столь явно, как во второй области. Поэтому на этом диапазоне частот ЛАЧХ можно представить в виде горизонтальной линии, ордината которой равна среднему значению ЛАЧХ в этом интервале.

На участке, содержащем более высокие частоты, можно отметить более выраженную тенденцию к уменьшению среднего значения ЛАЧХ. Учитывая особенности построения ЛАЧХ и реализацию типовых звеньев, эту область целесообразно аппроксимировать асимптотой с наклоном  $-20$  дБ/дек.

На рис. 2 также представлена аппроксимирующая ЛАЧХ фильтра (штриховая линия). Критерием выбора частоты среза был минимум среднеквадратической ошибки, равной разности ординат дискретной и аппроксимирующей ЛАЧХ. Полученная структура фильтра соответствует аperiodическому звену первого порядка:

$$W(s) = \frac{k}{(1 + Ts)}, \quad (6)$$

где:  $k$ ,  $T$ , – параметры фильтра:  $k = 1,444$ ;  $T = 1,887 \cdot 10^{-3}$  с.

Таким образом, при подаче на вход фильтра идеального белого шума динамическая составляющая математической модели сжатой дуги представляет собой гладкий реальный белый шум, спектральная плотность  $S(\omega)$  которого определяется выражением [14]:

$$S(\omega) = \frac{2D\mu}{\omega^2 + \mu^2}, \quad (7)$$

где:  $D$  – дисперсия сигнала, а  $\mu$  – параметр его затухания. Для найденного фильтра они составили  $553 B^2$  и  $530 рад/с$  соответственно. Спектральная плотность гладкого реального белого шума представлена на рис. 1 (пунктирная линия).

Аналогичные расчеты были проведены для средних значений тока  $4 A$  и  $6 A$ . В обоих случаях структура фильтра также представляет аperiodическое звено первого порядка со следующими параметрами:  $k = 1,587$ ;  $T = 1,266 \cdot 10^{-3}$  с для среднего значения тока  $4 A$  и  $k = 1,293$ ;  $T = 2,326 \cdot 10^{-3}$  с для среднего значения тока  $6 A$ .

На рис. 3 представлена осциллограмма напряжения на сжатой электрической дуге, полученная в электронном пакете MatLab, при указанном представлении дугового промежутка. Масштаб осциллограммы по оси напряжения составляет  $50 B/дел$ , а по оси времени –  $10 мс/дел$ . Также найдена спектральная плотность изменяющегося напряжения на дуге в математической модели, изображенная на рис. 1 (штриховая линия).

Сравнительный анализ спектральных плотностей, изображенных на рис.1, позволяет утверждать, что удалось получить очень высокую степень



сходства математической модели с реальным объектом. Различия графиков спектральной плотности изменяющегося напряжения на реальной дуге с графиками спектральной плотности модели и гладкого реального белого шума обусловлены проведенной аппроксимацией. Небольшие отличия последних двух графиков обусловлены особенностями дискретного белого шума, генерируемого программами компьютерной математики [11].

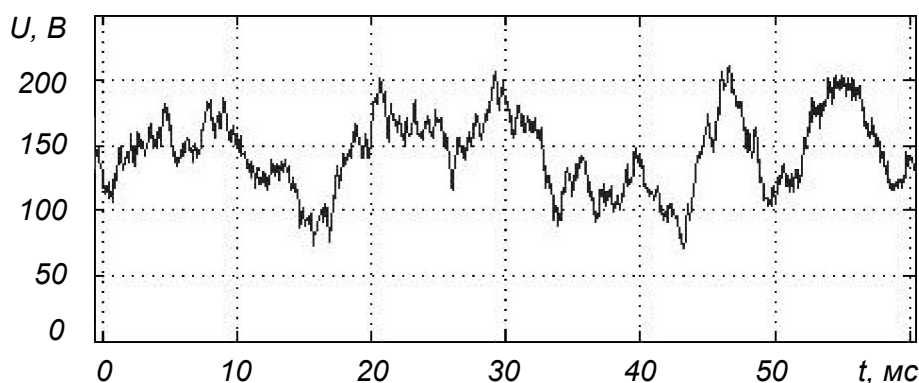


Рис. 3. Оциллограмма напряжения на дуге, снятая в математической модели, при среднем значении тока 5 А

С целью получения дополнительных данных для сопоставления математической модели с реальным объектом были рассчитаны среднее значение и дисперсия напряжения на дуге. При среднем значении тока 5 А для математической модели они составили 143,2 В и 567 В<sup>2</sup>, а для реальной дуги – 142,5 В и 587 В<sup>2</sup> соответственно [10]. Добиться их абсолютной идентичности не представляется возможным из-за случайного характера процессов, происходящих в дуговом промежутке, однако найденные значения очень близки.

### Заключение

На основании анализа экспериментальных данных была составлена математическая модель сжатой электрической дуги в канале плазматрона. Математическая модель представляет собой сумму сигналов, соответствующих среднему значению напряжения на дуге (статическая составляющая) и изменяющемуся напряжению (динамическая составляющая).

Параметры статической составляющей находятся на основании статической вольтамперной характеристики. Динамическая составляющая математической модели представлена в виде идеального белого шума, пропущенного через формирующий фильтр. В статье приведена разработанная методика синтеза формирующего фильтра.

Полученные результаты позволяют моделировать дугу в канале плазматрона с учетом случайных внешних воздействий. Очевидно, что повышение достоверности и точности математического описания объекта регулирования





позволяет ожидать получение достаточно точных результатов синтеза параметров остальных элементов САР и, как следствие этого, высокого качества процесса регулирования. Область применения описанного метода не ограничена лишь конкретной системой. Его можно считать универсальным и использовать для моделирования электрических дуг в плазматронах различных мощностей и типов.

### Библиографические ссылки

1. *Воронов А. Ю., Герасимов В. А.* Электрическая дуга в канале плазматрона при случайных газодинамических возмущениях // Научно-техническая конференция «Вологодские чтения». – Владивосток: ДВГТУ, 2009.
2. *Новиков О. Я.* Устойчивость электрической дуги. – Л.: Энергия, 1978.
3. *Девятков Б. Н., Новиков О. Я.* Математические методы исследования динамики и проблемы управления низкотемпературной плазмой. – Новосибирск: «Наука», 1991.
4. *Полак Л. С.* Моделирование и методы расчета физико-химических процессов в низкотемпературной плазме. – М.: «Наука», 1974.
5. *Достовалов В. А.* Газодинамическое управление термической плазмой. – Владивосток: ДВГТУ, 2004.
6. *Жуков М. Ф., Коротеев В. А., Урюков Б. А.* Прикладная динамика термической плазмы. – Новосибирск: «Наука», 1975.
7. *Катханов М. Н.* Теория судовых автоматических систем. – Л.: Судостроение, 1985.
8. *Попов Е. П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1989.
9. *Теория автоматического управления Ч. I, II / А. А. Воронов, Д. П. Ким, В. М. Лохин, И. М. Макаров, П. Н. Попович, В. З. Рахманкулов.* – М.: Высшая школа, 1986.
10. *Солодовников В. В., Усков А. С.* Статистический анализ объектов регулирования. – М.: Машгиз, 1960.
11. *Кувшинов Г. Е., Наумов Л. А., Чутина К. В.* Системы управления глубиной погружения буксируемых объектов. – Владивосток: Дальнаука, 2006.
12. *Сергиенко А. Б.* Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003.
13. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического управления. – СПб.: Профессия, 2004.
14. *Теория автоматического управления / С. Е. Душин, Н. С. Зотов, Д. Х. Имаев, Н. Н. Кузьмин, В. Б. Яковлев.* – М.: Высшая школа, 2003.