УДК 532.5

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В НЕДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ ПОР

Саваторова В. Л. – канд. ф.-м. наук, доцент кафедры «Общая физика» (НИЯУ «МИФИ»), тел. 8-903-233-68-75, e-mail: svl97@rambler.ru

В данной работе уравнение Бринкмана используется для описания фильтрации несжимаемой жидкости в недеформируемой среде, структура пор в которой предполагается периодической. Теория усреднения применяется для описания просачивания жидкости в гетерогенной среде, в которой можно выделить два характерных масштаба: микромасштаб (характерный размер пор) и глобальный макромасштаб. Для обоих масштабных уровней выводятся определяющие уравнения. Нахождение эффективных фильтрационных характеристик среды, а также скорости и давления жидкости сводится к решению соответствующих задач на ячейке периодичности. Исследуется эффект нелинейности, связанной с зависимостью вязкости жидкости от давления.

In this paper we consider Brinkman's equation governing the flow of an incompressible fluid through a porous medium to take into account the variation of viscosity with pressure. We use a homogenization procedure, that exploits a multiple scale structure possessed by a solid porous medium, a 'micro-scale' comparable to the pore size and a 'macro-scale' associated with the global size of the body, to carry out a multiple-scale asymptotic analysis. We deduce the governing equations for both scales and solve periodic problems in cells in order to find effective permeability, pressure distribution and velocity of the fluid.

Ключевые слова: усреднение, фильтрация, уравнение Бринкмана, зависимость вязкости жидкости от давления.

Постановка задачи и усреднение уравнений фильтрации

Процессы фильтрации жидкости в пористых средах играют важную роль в геофизике, реологии, при разработке нефтяных месторождений; их моделирование имеет многочисленные приложения для создания композиционных, полимерных материалов и различных фильтрующих устройств [1]. В данной работе будет обсуждаться просачивание жидкости сквозь несжимаемую пористую среду, описываемое уравнением Бринкмана [2] с учетом нелинейности, связанной с зависимостью вязкости жидкости от давления.

Предположим, что гетерогенная пористая среда характеризуется периодической структурой на уровне масштаба пор. Пусть l – характерный размер поровой структуры, а L – характерный глобальный размер $l<<L$. Рассмотрим фильтрацию несжимаемой вязкой жидкости сквозь твердую недеформируе-

мую пористую среду на уровне масштаба пор, т.е. в пределах представительного элементарного объема Y (играет роль ячейки периодичности) с характерным размером $O(l)$. Обозначим как Y_f часть объема Y, занятую жидкостью, границу раздела твердое тело-жидкость в пределах ячейки периодичности обозначим как G. Процесс фильтрации будем описывать уравнением Бринкмана (1), дополненным уравнением неразрывности (2) и граничным условием прилипания (3).

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu(p)D_{ij}\right)+\frac{\mu(p)}{K}v_i=0 \qquad (1),$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0 \qquad (2),$$

$$v_i\big|_G=0 \qquad (3).$$

Здесь v_i – компоненты скорости жидкости ($i=1,2,3$), D_{ij} – компоненты тензора, определяемые соотношением $D_{ij}=1/2\left(\left(\partial v_i/\partial x_j\right)+\left(\partial v_j/\partial x_i\right)\right)$, p – давление жидкости, μ – динамическая вязкость, и K – коэффициент проницаемости. В уравнениях (1), (2) и далее по тексту по повторяющимся индексам в уравнениях производится суммирование.

Проведем процедуру обезразмеривания. Для этого введем следующие безразмерные переменные:

$$x_i=lx_i',\ p=Pp',\ v_i=uv_i',\ \mu=\mu_0\mu', \qquad (4).$$

Считая, что движение жидкости управляется градиентом давления, по порядку величины равным O (P/L), предположим справедливость соотношения $\frac{P}{L}\sim\frac{\mu_0 u}{l^2}$. Тогда характерную скорость жидкости можно оценить как:

$$u\sim\frac{Pl^2}{\mu_0 L} \qquad (5).$$

Подставив (4) в систему уравнений (1)-(3), используя соотношение (5) и введя обозначение $\varepsilon=l/L$, где $\varepsilon<<1$ – малый параметр, получим безразмерный аналог задачи (1)-(3) в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu(p)D_{ij}\right)+\varepsilon^{-1}\alpha\ v_i=0 \qquad (6),$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0 \qquad (7),$$

$$v_i\big|_G=0 \qquad (8).$$

Здесь в (6)-(8) для простоты обозначений опущен символ «'», и введено обозначение $\alpha=\varepsilon^{-2}\,\mu l^2/\left(K\mu_0\right)$.

Применим процедуру усреднения [3] к среде, в которой можно выделить микромасштаб (на уровне масштаба пор l), характеризуемый координатами $\xi=\left\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\right\}$, и макромасштаб (порядка глобального размера всей пористой среды L), характеризуемый координатами $x=\left\{x_1,x_2,x_3\right\}$. Предположим, что для координат x и ξ справедливы соотношения:

$$x=\varepsilon\xi,\ \varepsilon=l/L<<1 \qquad (9).$$

В рамках метода асимптотического усреднения [3] решение задачи (6)-(8) будем искать в виде рядов:

$$v_i=v_i^{(0)}+\varepsilon v_i^{(1)}+\varepsilon^2 v_i^{(2)}+.. \qquad (10),$$

$$p\ =p^{(0)}+\varepsilon p^{(1)}+\varepsilon^2 p^{(2)}+.. \qquad (11),$$

где $\vec{v}$ и p – периодические функции ξ.

При этом $D_{ij}=\dfrac{1}{\varepsilon}D_{ij,\xi}^{(0)}+\left(D_{ij,x}^{(0)}+D_{ij,\xi}^{(1)}\right)+\varepsilon\left(D_{ij,x}^{(1)}+D_{ij,\xi}^{(2)}\right)+\varepsilon^2\left(D_{ij,x}^{(2)}+D_{ij,\xi}^{(3)}\right)+\ldots$,

где $D^{(0)}{}_{ij,\xi}=\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial v_i^{(0)}}{\partial\xi_j}\right)+\left(\dfrac{\partial v_j^{(0)}}{\partial\xi_i}\right)\right), D^{(0)}{}_{ij,x}=\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j}\right)+\left(\dfrac{\partial v_j^{(0)}}{\partial x_i}\right)\right)$.

С учетом (11) зависимость динамической вязкости жидкости от давления может быть выражена, как:

$$\mu(p)=\mu\left(p^{(0)}\right)+\varepsilon\left(\mu'\left(p^{(0)}\right)p^{(1)}\right)+\varepsilon^2\left(\mu'\left(p^{(0)}\right)p^{(2)}+\frac{1}{2}\mu''\left(p^{(0)}\right)p^{(1)}\right)+..\ (12),$$

где $\mu'\left(p^{(0)}\right)=\left.\dfrac{\partial\mu}{\partial p}\right|_{p=p^{(0)}}, \mu''\left(p^{(0)}\right)=\left.\dfrac{\partial^2\mu}{\partial p^2}\right|_{p=p^{(0)}}$.

Подстановка выписанных выше рядов в уравнения (6)-(8) после приравнивания к нулю слагаемых при одинаковых степенях малого параметра ε дает нам рекуррентную цепочку задач. Так из уравнения (6), приравнивая к нулю слагаемые порядка ε^{-1}, получим:

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial\xi_i}-\mu'\left(p^{(0)}\right)\frac{\partial p^{(0)}}{\partial\xi_i}D_{ij,\xi}^{(0)}-\mu\left(p^{(0)}\right)\nabla_{\xi\xi}^2 v_i^{(0)}+\alpha v_i^{(0)}=0$$

Аналогично, приравнивая к нулю слагаемые порядка ε^{-1} в уравнении (7) и слагаемые порядка ε^0 в равенстве (8), будем иметь:

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial\xi_i}=0$$

$$\left.v_i^{(0)}\right|_G=0$$

В результате приходим к заключению о справедливости выражений:

$$v_i^{(0)} = 0 \quad (13),$$

$$p^{(0)} = p^{(0)}(x) \quad (14)$$

и выводу о том, что первый член в разложении давления $p^{(0)}(x)$ зависит только от глобальной переменной.

Приравнивая к нулю слагаемые порядка ε^0 в уравнении (6), получим:

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} - div_\xi \left(\mu\left(p^{(0)}\right)\left(D_x^{(0)} + D_\xi^{(1)}\right) + \mu'\left(p^{(0)}\right) p^{(1)} D_\xi^{(0)} \right) - div_x \left(\mu\left(p^{(0)}\right) D_\xi^{(0)} \right) + \alpha v_i^{(1)} = 0$$

откуда с учетом выражений (12)-(14) следует уравнение:

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} - \mu\left(p^{(0)}\right)\left(\nabla_{\xi\xi}^2 v_i^{(1)}\right) + \alpha v_i^{(1)} = 0 \quad (15).$$

Приравнивая к нулю слагаемые порядка ε^0 и ε^1 в уравнении (7), а также слагаемые порядка ε^1 в равенстве (8), с учетом выражений (13)-(14) получим:

$$\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (16),$$

$$v_i^{(1)}\Big|_G = 0 \quad (17),$$

$$\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18).$$

Решение задачи (15)-(17) будем искать в виде:

$$v_i^{(1)} = \beta_{ij}\left(-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}\right) \quad (19),$$

$$p^{(1)} = \gamma_j\left(-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}\right) \quad (20).$$

Подстановка соотношений (19)-(20) в систему (15)-(17) приводит к задаче на ячейке:

$$\frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi_i} - \mu\left(p^{(0)}\right)\nabla_{\xi\xi}^2 \beta_{ij} + \alpha\beta_{ij} = \delta_{ij} \quad (21),$$

$$div\beta = \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (22),$$

$$\beta_{ij}\Big|_G = 0 \quad (23).$$

Из решения задачи на ячейке определяются β_{ij} и γ_j (δ_{ij} – символ Кронекера). При этом $p^{(0)}$ можно рассматривать в качестве параметра.

Определим процедуру усреднения по ячейке периодичности в виде:

$$\langle g \rangle = \frac{1}{V_{\Upsilon}} \int\limits_{\Upsilon_f} g dV, \qquad (24),$$

где Υ – сама ячейка периодичности объема V, Υ_f – ее часть, занятая жидкостью.

Применяя процедуру усреднения (24) к соотношению (19), получим:

$$\left\langle v_i^{(1)} \right\rangle = \left\langle \beta_{ij}\left(p^{(0)}\right)\right\rangle \left(-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}\right) \qquad (25).$$

Усреднение соотношения (18) по ячейке периодичности в соответствии с (24) дает уравнение:

$$div_x \left\langle v^{(1)} \right\rangle = \frac{\partial \left\langle v_i^{(1)} \right\rangle}{\partial x_i} = 0 \qquad (26),$$

при выводе которого была использована ξ-периодичность функций $v^{(2)}$ и граничное условие $v^{(2)}\Big|_G = 0$.

Подставляя выражения (25) в формулу (26), получим макроскопическое усредненное уравнение фильтрации в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left\langle \beta_{ij}\left(p^{(0)}\right)\right\rangle \left(-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}\right)\right) = 0. \qquad (27).$$

Конкретный вид зависимости коэффициента динамической вязкости μ от давления будет определять вид величины $\left\langle \beta_{ij}\left(p^{(0)}\right)\right\rangle$.

Фильтрация вязкой несжимаемой жидкости в среде, состоящей из тонких проницаемых каналов

В качестве примера рассмотрим случай фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в недеформируемой среде, представляющей собой периодическую систему тонких цилиндрических проницаемых каналов определенного радиуса. Пусть каналы характеризуются радиусом R, который мал по сравнению с глобальным характеристическим размером среды L. Предположим, что каналы ориентированы вдоль оси x_3, тогда линии тока параллельны той же самой оси, и для скорости вязкой несжимаемой жидкости будет справедливо выражение $v^{(1)} = \left\{o, o, v_3^{(1)}\right\}$. Учитывая это выражение для вектора скорости, из соотношения (19) следует, что $\beta_{1j} = \beta_{2j} = 0,\ \ j = 1,2,3$.

Задача на ячейке (21)-(23) будет иметь аналитическое решение:

$$\beta_{33}(r)=\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{I_0\left(r\sqrt{\alpha/\mu}\right)}{I_0\left(R\sqrt{\alpha/\mu}\right)}\right),\qquad \beta_{3j}=0,\, j=1,2 \tag{28}$$

Усредняя выражение (28) по ячейке периодичности ($V_Y=1$), получим:

$$\langle\beta_{33}\rangle=2\pi\frac{K}{\mu}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{\sqrt{K}\cdot R\cdot I_1\left(R/\sqrt{K}\right)}{I_0\left(R/\sqrt{K}\right)}\right),\quad \langle\beta_{3j}\rangle=0,\, j=1,2 \tag{29}$$

где I_0 и I_1 – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно.

В рассматриваемом нами одномерном случае соотношение (25) имеет вид:

$$\left\langle v^{(1)}\right\rangle=\left\langle\beta_{33}\left(p^{(0)}\right)\right\rangle\left(-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_3}\right) \tag{30}$$

Подставив выражения (29) в уравнение (27), получим, что для определения первого члена в разложении давления $p^{(0)}$ надо решить обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial {x_3}^2}-\frac{1}{\mu\left(p^{(0)}\right)}\frac{\partial\mu\left(p^{(0)}\right)}{\partial p^{(0)}}\left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_3}\right)^2=0 \tag{31}$$

граничные условия которого могут иметь вид:

$$p^{(0)}\left(x_3=0\right)=p_1;\, p^{(0)}\left(x_3=1\right)=p_2 \tag{32}$$

Для решения задачи (31)-(32) определяющим фактором будет являться конкретный вид зависимости динамической вязкости жидкости μ от $p^{(0)}$.

Первый член в разложении скорости фильтрации в соответствии с (30) будет:

$$\begin{gathered}\left\langle v^{(1)}\right\rangle=\left\langle\beta_{33}\left(p^{(0)}\right)\right\rangle\left(-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_3}\right)=-\langle K\rangle\left(\mu\left(p^{(0)}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_3}\right)\\ \langle K\rangle=2\pi K\left(\frac{R^2}{2}-\frac{\sqrt{K}\cdot R\cdot I_1\left(R/\sqrt{K}\right)}{I_0\left(R/\sqrt{K}\right)}\right)\end{gathered} \tag{33}$$

Результаты учета зависимости вязкости жидкости от давления

Ниже представлены результаты интегрирования задачи (31)-(32) для одномерного случая фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в недеформируемой среде, представляющей собой периодическую систему тонких цилиндрических проницаемых каналов. Рассматривались несколько возможных соотношений, связывающих вязкость и давление жидкости [4]:

1: $\mu(p)=\mu_o\exp(\mathrm{B}p)$

2: $\mu(p) = \mu_o$

3: $\mu(p) = \mu_o(1 + \mathrm{B}p)$

Распределение давления вычислялось для каждого из этих соотношений.

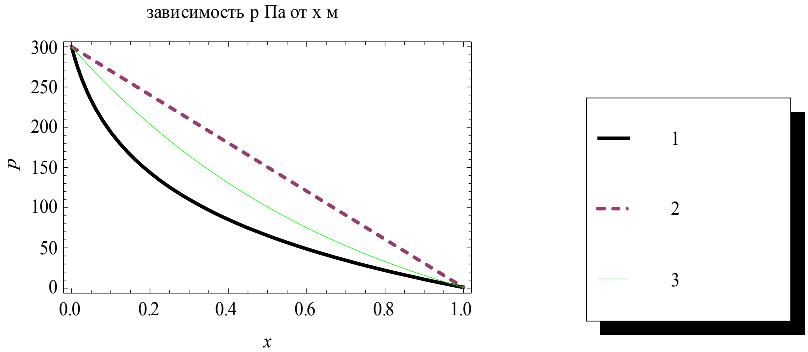

Рис. 1. Давление жидкости как функция координаты

На рис.1 можно видеть, что в случае 2, где не учитывалась зависимость вязкости жидкости от давления, распределение давления представляет собой линейную функцию координаты, и величина давления в любой точке внутри рассматриваемого интервала превышает соответствующие значения для двух других случаев, которые, согласно [4], находятся в лучшем согласии с данными экспериментов.

В случае экспоненциальной зависимости вязкости жидкости от ее давления $\mu(p) = \mu_o \exp(\mathrm{B}p)$ было исследовано распределение давления жидкости (рис. 2) для различных значений параметра B, включая $\mathrm{B} = 0$, соответствующее постоянной вязкости. На рис. 2 можно видеть, что, чем больше значение параметра B, тем больше кривизна графика $p(x)$ зависимости давления от координаты, и тем меньше величина давления в любой точке внутри рассматриваемой области.

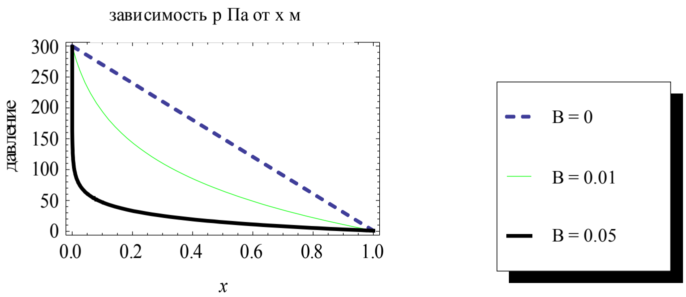

Рис. 2. Распределение давления; $\mu(p) = \mu_o \exp(\mathrm{B}p)$

Заключение

В данной работе метод асимптотического усреднения был применен к описанию фильтрации вязкой жидкости в недеформируемой пористой среде с учетом нелинейности, связанной с зависимостью вязкости жидкости от давления. Предполагалось, что на уровне размера порового пространства среда может рассматриваться как периодическая. Были выписаны управляющие уравнения и получены усредненные макроскопические соотношения, определяющие скорость и давление жидкости. Нахождение эффективных характеристик среды (тензора проницаемости) свелось к решению задач на ячейках периодичности с соответствующими граничными условиями. В общем случае такие задачи на ячейках должны решаться численно. Было получено аналитическое решение для частного случая фильтрации несжимаемой жидкости в недеформируемой среде, состоящей из тонких проницаемых каналов. Используемый метод усреднения можно применять к рассмотрению и других задач, в которых присутствует несколько характерных пространственных масштабов периодичности.

Библиографические ссылки

1. *Филоненко В. С.* Метод конечных элементов для спектральной задачи о нормальных колебаниях вязкой экспоненциально-стратифицированной жидкости // Вестник ТОГУ. 2007. №4 (7).

2. *Auriault J.-L.* On the Domain of Validity of Brinkman’s Equation // Transp.Porous Media, 2009. P. 215-223.

3. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М., 1984.

4. *Nakshatrala K. B., Rajagopal K. R.* A numerical study of fluids with pressure dependent viscosity flowing through a rigid porous media // Int. J. Numer. Meth. Fluids. July, 2010.