УДК 536.46

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО, ВЯЗКОГО, ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Булгаков В. К. – д.-р. физ.-мат. наук, проф. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ТОГУ), тел.: (4212) 37-52-03; *Пассар А. В.,* – ст. преп. кафедры «Теоретическая механика», тел: 8-914-204-30-58 (ДВГУПС)

В рамках гидродинамического подхода изложена математическая модель внутренних течений сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа. В квазиравновесном термодинамическом приближении рассмотрены динамические и энергетические процессы в газе. В основном рассмотрен совершенный газ.

Within the hydrodynamic approach the mathematical model of internal flows of a compressible, viscous, heat-conducting gas is provided. In a quasi-equilibrium thermodynamic approach dynamic and energy processes in a gas are considered. Basically the perfect gas is discussed.

Ключевые слова: математическая модель течения, динамические и энергетические процессы в гидродинамическом, квазиравновесном приближении, совершенный газ.

Введение

Современная газовая динамика, в том числе и газовая динамика внутренних течений вязкого, теплопроводного газа, базируется на нескольких гипотезах.

1. Гипотеза сплошности [3].

Рассмотрим дозвуковые внутренние течения в области $\Omega \cup \Gamma = \overline{\Omega}$, где Ω − открытое связанное множество с достаточно гладкой границей Γ, $\overline{\Omega} \subset E^3$, где E^3 − трехмерное евклидово пространство точек $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ с метрикой $\rho(\vec{x}, \vec{x}') = \left(\sum_{i=1}^{3} \left(x_i - x_i' \right)^2 \right)^{1/2}$.

Разобьем область $\overline{\Omega}$ на малые кубики Гильберта $V_h = h^3$. Здесь ребро кубика Гильберта h имеет малую, но конечную величину, такую, что объем V_h содержит достаточно большое число N_h атомов газа и для объема V_h существует понятие термодинамических величин температуры, энтропии, давления, плотности и других (обозначим их через $\{T_1,...,T_n\}$), причем относительные флуктуации этих величин

$$\delta T_i = \frac{\left[\overline{(T_i - \overline{T}_i)^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\overline{T}_i}$$

были бы приемлемо малы для задач исследования.

Для аддитивных термодинамических величин T^a (заметим, что большинство термодинамических величин являются аддитивными) имеем оценку [9]:

$$\delta T^a \sim (N_h)^{-1/2}.$$

Если задаться $\delta T^a \sim 0{,}58 \cdot 10^{-7}$, то получаем $N_h \sim 3 \cdot 10^{10}$, т. е. в кубике Гильберта V_h должно находиться $3 \cdot 10^{10}$ атомов газа. Откуда получаем что в нормальных условиях ($P = 1{,}01 \cdot 10^5$ *Па*, $T = 273$ *K*, $\rho = 1{,}29$ *кг/м*^{3}) $V_h = 10^{-15}$ *м*^{3}, а $h = 10^{-5}$ *м*.

Термодинамические величины имеют смысл для объемов $\geq V_h$, а минимальное расстояние в физическом пространстве в области $\overline{\Omega}$ есть величина $h \sim 10^{-5}$ *м*.

Гипотеза сплошности предполагает, что можно провести интерполяцию дискретного физического пространства (интерполяцию термодинамических функций) так, чтобы для любой точки $\vec{x} \in \overline{\Omega} \subset E^3$ существовали значения термодинамических функций, обладающих свойствами достаточной гладкости, существовало понятие «при $h \to 0$», производных требуемого порядка, была возможность использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления, т. е. весь арсенал, как говорят физики, математических «фикций». Подчеркнем, что когда говорится о значении какой-то термодинамической функции в точке $\vec{x} \in \overline{\Omega} \subset E^3$, то имеется в виду подмножество Ω − кубик Гильберта V_h, внутри которого находится точка $\vec{x}$. К сожалению, гипотеза сплошности и атомное строение сплошной среды принципиально несовместимы.

2. Гипотеза о локально равновесном приближении течения газа, являющегося неравновесной системой.

Эта гипотеза является попыткой совместить динамику (течения газа) с равновесной статистической физикой её естественным результатом − равновесной термодинамикой. Эта гипотеза открывает доступ к простым, изящным зависимостям между макроскопическими термодинамическими величинами. Следует также отметить, что к сожалению течение газа, процессы, происходящие в нем и равновесная статистическая физика, также принципиально не совместимы.

Настоящая статья относится к классической газовой динамике (также используют гипотезы 1, 2).

Цель работы − это математическое моделирование течения сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа и процессов происходящих в нем. В статье в основном рассматривается совершенный газ [3].

Пусть E – удельная внутренняя энергия единицы массы совершенного одноатомного газа, а $u^2{}_{cp}$ – среднее значение квадрата скорости атомов в их хаотическом тепловом движении. Тогда по определению для удельной внутренней энергии имеем

$$E = \frac{u^2{}_{cp}}{2} + const. \tag{0.1}$$

Для совершенного газа зависимость между энергией E и температурой T можно представить в виде

$$E = c_v T + const, \tag{0.2}$$

где c_v − размерный коэффициент пропорциональности между $\frac{1}{2}u^2{}_{cp}$ и T.

Коэффициент c_v в соответствии со своим физическим смыслом называется теплоемкостью при постоянном объеме.

Соотношение (0.2) вместе с уравнением состояния Клапейрона-Менделеева

$$P = R\rho T \tag{0.3}$$

фиксируют конкретную модель сплошной среды, называемую совершенным газом [3], где R – газовая постоянная, есть число, различное для разных газов. Для воздуха, например, $R = 287{,}042\ м^2/(c^2 \cdot K)$.

Теплоемкости при постоянном давлении c_p и объеме c_v для совершенного газа удовлетворяют соотношению Майера

$$R = c_p - c_v. \tag{0.4}$$

Как раньше уже отмечалось, течение сжимаемого вязкого, теплопроводного газа является классически неравновесной системой, поэтому в случае, когда течение сопровождается значительными градиентами вектора скорости $\vec{u}$, внутренней энергии E, температуры T, энтропии S, равновесные определения термодинамических величин теряют смысл [1]. В рамках локально неравновесной термодинамики используемые нами термодинамические величины ρ, ρE, $\vec{u}$ определяются по-прежнему. Так, ρ, ρE есть масса и внутренняя энергия «физических точек» пространства $\overline{\Omega} \subset E^3$; $\rho\vec{u}$ есть импульс объема ΔV: $V_h \leq \Delta V \ll \overline{\Omega}$, точнее центра масс атомов, совершающих хаотическое тепловое движение в объеме ΔV. Остальные термодинамические величины определяются по тем же формулам от ρ, E, которые установлены в состоянии теплового равновесия.

Следуя [1], будем считать, что при малых градиентах скорости течения, температуры, внутренней энергии, давления, (в локально равновесном приближении) энтропия S совпадает с истиной энтропией, совершенный газ остается совершенным и соотношение Гиббса

$$dE = TdS + \frac{P}{\rho^2}d\rho \tag{0.5}$$

остается справедливым, из которого следуют необходимые рабочие термодинамические формулы

$$\rho dE = \rho TdS + \frac{P}{\rho}d\rho, \tag{0.5a}$$

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t} = \rho T\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{P}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{0.5b}$$

$$\rho\nabla E = \rho T\nabla S + \frac{P}{\rho}\nabla\rho. \tag{0.5c}$$

В книге И. Дьярмати [4] утверждается, что локальное равновесие существует в системах, весьма далеких от полного термодинамического равновесия. Дьярмати приводит результат исследований Мейкснера [5], который установил, что малые элементы объема одноатомного газа можно рассматривать как равновесные объемы. Для газа при нормальных условиях его можно рассматривать как систему локально равновесных малых объемов до температурного градиента $10^7\ К/м$, т. е. что до этого предела можно применять подходы равновесной термодинамики.

1. Уравнения движения

В рамках гидродинамического подхода, допущений, оговоренных во введении, уравнения движения сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа в декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 при использовании элементов тензорного и векторного анализа можно записать в виде [1, 3]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho u_k\right) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho u_i u_k + P\delta_{ik}\right) = \frac{\partial\sigma_{ik}^{(v)}}{\partial x_k}. \tag{1.2}$$

Здесь P – гидростатическое давление, δ_{ik} – символ Кронекера. Тензор вязких напряжений $\sigma_{ik}^{(v)}$ в приближении ньютоновской сплошной среды удовлетворяет следующему реологическому уравнению:

$$\sigma_{ik}^{(v)} = \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right) \tag{1.3}$$

Подставляя тензор вязких напряжений в уравнения Навье-Стокса (1.2) получим

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho u_i u_k + P\delta_{ik}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right). \tag{1.4}$$

В большинстве случаев коэффициент динамической вязкости можно считать постоянным вдоль потока и вынести его из-под знака производной. Тогда уравнения движения (1.4) для совершенного газа, т. е. когда имеет место зависимость $P = (\kappa - 1)\rho E$, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho u_i u_k + (\kappa-1)\rho E\delta_{ik}\right) = \eta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \tag{1.5}$$

Проекции уравнений движения на координатные оси x_1, x_2, x_3 имеют вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho u_1^2 + (\kappa-1)\rho E\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho u_1 u_2\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho u_1 u_3\right) = \\ &= \eta\Delta u_1 + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\end{aligned} \tag{1.6a}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho u_1 u_2\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho u_2^2 + (\kappa-1)\rho E\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho u_2 u_3\right) = \\ &= \eta\Delta u_2 + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\end{aligned} \tag{1.6b}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho u_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho u_1 u_3\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho u_2 u_3\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho u_3^2 + (\kappa-1)\rho E\right) = \\ &= \eta\Delta u_3 + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\end{aligned} \tag{1.6c}$$

2. Уравнения для энергетических характеристик

Пусть $\rho\frac{u^2}{2} + \rho E$ − полная (кинетическая плюс внутренняя) энергия элемента объема $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \geq V_h$, $\Delta V \ll L_{\min}^3$ физического пространства $\overline{\Omega} \subset E^3$; здесь $u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_i \cdot u_i$. Обозначим через $\vec{J}$ – вектор полной плотности потока энергии вязкого теплопроводного газа

$$J_k = \left(\rho\frac{u^2}{2} + \rho E\right)u_k - \sigma_{ik} u_i - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{2.1}$$

Здесь λ − коэффициент теплопроводности.

Введем тензор напряжений $\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(v)}$, (2.2)

где $\sigma_{ik}^{(v)}$ − тензор вязких напряжений (1.3).

С учетом выражения для вектора плотности полного потока энергии (2.1) закон сохранения полной энергии при течении в области $\Omega(x_1, x_2, x_3)$ сжимаемого вязкого, теплопроводного газа имеет вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2} + \rho E\right) = -\nabla \cdot \left[\left(\rho\frac{u^2}{2} + \rho E\right)\vec{u} - \sigma_{ik} u_i - \lambda \nabla T\right] \tag{2.3}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2} + \rho E\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k\left(\rho\frac{u^2}{2} + \rho E + P\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}^{(v)} u_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k} \tag{2.4}$$

Введем хорошо известное в теории тепломассообмена число Прандтля $\Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}$. Из различных источников [6, 7] число Прандтля для воздуха оценивается величинами $\Pr = 0{,}7 \div 0{,}74$. Обозначим через $\kappa = c_p / c_v$ − коэффициент адиабаты Пуассона, для воздуха $\kappa = 1{,}4 \div 1{,}405$. Вектор теплового потока обусловленный теплопроводностью, выражается через градиент температуры по формуле

$$\vec{q} = -\frac{\eta c_p}{\Pr}\nabla T. \tag{2.5}$$

Тогда уравнение энергии (3.4) примет форму

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2} + \rho E\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k\left(\rho\frac{u^2}{2} + \rho E + P\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}^{(v)} u_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\eta c_p}{\Pr}\frac{\partial T}{\partial x_k} \tag{2.6}$$

Для совершенного газа имеют место соотношения

$$P = (\kappa - 1)\rho E, \qquad E = c_v T + const. \tag{2.7}$$

Используя формулы (2.7), в предположении что κ, c_v − постоянные, уравнение сохранения полной энергии для течения совершенного газа можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2}+\rho E\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k\left(\rho\frac{u^2}{2}+\kappa\rho E\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}^{(v)}u_i\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\eta\kappa}{\Pr}\frac{\partial E}{\partial x_k}. \quad (2.8)$$

Используя уравнение сохранения импульса, записанное в форме [8]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho u_i u_k-\sigma_{ik}\right), \quad (2.9)$$

где тензор напряжений σ_{ik} определяется зависимостью (2.2), нетрудно получить уравнение переноса кинетической энергии. Умножим уравнение (2.9) для i-й компоненты импульса на компоненту скорости u_i

$$u_i\frac{\partial\rho u_i}{\partial t}=u_i^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_i{}^2}{2}\right)=-u_i\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho u_i u_k-\sigma_{ik}\right).$$

(по i не суммируется)

Используя уравнение неразрывности, продолжим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u_i{}^2}{2}\right)=\frac{u_i{}^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\rho u_k-u_i^2\frac{\partial\rho u_k}{\partial x_k}-u_i\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+u_i\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=$$

$$=-\frac{u_i{}^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\rho u_k-\rho u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{u_i{}^2}{2}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i\sigma_{ik}\right)-\sigma_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

(по i не суммируется)

Учитывая выражение (2.2) для тензора напряжений можно продолжить

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u_i{}^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\frac{u_i{}^2}{2}u_k+P\delta_{ik}u_i\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}^{(v)}u_i\right)+P\delta_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\sigma_{ik}^{(v)}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

(по i не суммируется)

Проведя свертывание по индексу i, окончательно получим уравнение переноса кинетической энергии сжимаемого вязкого газа

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k\left(\rho\frac{u^2}{2}+P\right)\right]=P\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}^{(v)}u_i\right)-\sigma_{ik}^{(v)}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (2.10)$$

Вычитая из закона сохранения полной энергии (2.6) уравнение переноса кинетической энергии (2.10), получаем уравнение переноса внутренней энергии, имеющее место в любой точке физического пространства R_{ϕ}^3 в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho E u_k\right]=-P\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\eta c_p}{\Pr}\frac{\partial T}{\partial x_k}+\sigma_{ik}^{(v)}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (2.11)$$

Воспользовавшись известным соотношением векторного анализа

$$\nabla \cdot \left(\varphi \vec{f}\right) = \vec{f} \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{f} \;,$$

уравнения переноса кинетической и внутренней энергий (2.10), (2.11) можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{u^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_k \rho \frac{u^2}{2}\right) = -u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}^{(v)} u_i\right) - \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,; \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k(\rho E + P)\right] = u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,. \qquad (2.13)$$

Используя зависимости (2.7) уравнения переноса кинетической и внутренней энергий (2.12), (2.13) в случае совершенного газа можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{u^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_k \rho \frac{u^2}{2}\right) = -(\kappa - 1) u_k \frac{\partial \rho E}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}^{(v)} u_i\right) - \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,; \qquad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \kappa \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k \rho E\right] = (\kappa - 1) u_k \frac{\partial \rho E}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\eta \kappa}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial E}{\partial x_k} + \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,. \qquad (2.15)$$

Входящий в уравнения переноса кинетической и внутренней энергий член $\sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ описывает диссипацию кинетической энергии в тепло благодаря вязкости.

В книге [1] показано, что диссипативный член может быть записан в виде

$$\sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right).$$

Вычисление правой части приводит к формуле

$$\sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \eta\, \Phi,$$

где Φ – так называемая диссипативная функция, равная

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] +$$

$$+ \underline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2. \qquad (2.16)$$

Нетрудно показать, что диссипативная функция Φ всегда положительна. Действительно, подчеркнутые члены диссипативной функции всегда положительны, а первый член в квадратных скобках и последний член $-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2$ можно представить в форме

$$\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right].$$

Последнее полученное выражение также всегда положительно. Заметим, что диссипативную функцию можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\Phi = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right]+ \\ +\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2. \qquad (2.17)$$

Для того чтобы привести уравнение сохранения полной энергии, например (2.8), уравнение переноса кинетической энергии, например, (2.14) к рабочему виду, необходимо еще вычислить свертку $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}^{(v)}u_i\right)$, которая входит в эти уравнения и описывает поток энергии, связанный с процессами внутреннего трения. Используя уравнения для тензора вязких напряжений (1.3), а также следующие очевидные тождества

$$u_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{u_i{}^2}{2}\right) \quad i,j=\overline{1,3} \qquad (2.18)$$

(по i, j не суммируется)

$$u_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_i}+u_i\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i\partial x_j} \quad i,j=\overline{1,3} \qquad (2.19)$$

(по i, j не суммируется)

в результате простых, но несколько громоздких вычислений получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}^{(v)}u_i\right)=\eta\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right)+\frac{\eta}{3}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{u_1^2}{2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{u_2^2}{2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{u_3^2}{2}\right)\right]+ \\ +\frac{\eta}{3}\left(\frac{\partial^2 u_1u_2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_1u_3}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 u_2u_3}{\partial x_2\partial x_3}\right)+ \qquad (2.20) \\ +\frac{5}{3}\eta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

При использовании полученной формулы (2.20) уравнение сохранения полной энергии совершенного газа можно представить в форме

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2}+\rho E\right)=-\nabla\cdot\left[\vec{u}\left(\rho\frac{u^2}{2}+\kappa\rho E\right)\right]+\eta\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right)+\\
&+\eta\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{u_1^2}{6}+\frac{\kappa}{\mathrm{Pr}}E\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{u_2^2}{6}+\frac{\kappa}{\mathrm{Pr}}E\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{u_3^2}{6}+\frac{\kappa}{\mathrm{Pr}}E\right)\right]+\\
&+2\eta\left[\frac{\partial^2 u_1u_2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_1u_3}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 u_2u_3}{\partial x_2\partial x_3}\right]-\\
&-\frac{5}{3}\eta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[u_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[u_3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right]\right).
\end{aligned}\qquad(2.21)$$

Конечно, закон сохранения полной энергии не даст ответа на вопрос, какая величина кинетической энергии и где (участок течения) диссипирует во внутреннюю. Закон сохранения полной энергии может исполнять различные «контрольные» функции: правильность счета внутренней и кинетической энергии, правильность счета всех уравнений, помогать авторам избавиться от грубых ошибок в алгоритме, найти наиболее слабые места всей методики.

Уравнения переноса кинетической энергии в случае совершенного газа, например (2.15), теперь можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2}\right)=-\nabla\cdot\left[\rho\frac{u^2}{2}\,\vec{u}\right]-(\kappa-1)\vec{u}\nabla\rho E+\eta\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right)+\eta\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{u_1^2}{6}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{u_2^2}{6}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{u_3^2}{6}\right)\right]+2\eta\left[\frac{\partial^2 u_1u_2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_1u_3}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 u_2u_3}{\partial x_2\partial x_3}\right]-\\
&-\frac{5}{3}\eta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[u_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right]\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[u_3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right]\right)-\eta\Phi,
\end{aligned}\qquad(2.22)$$

а уравнение переноса внутренней энергии в случае совершенного газа, например (2.15), в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E)=-\kappa\nabla\cdot(\rho E\vec{u})+(\kappa-1)\vec{u}\cdot\nabla\rho E+\nabla\cdot\left(\frac{\eta\kappa}{\mathrm{Pr}}\nabla E\right)+\eta\Phi \qquad (2.23)$$

Знание закономерностей изменения энтропии в потоке необходимо как составная анализа физических процессов, происходящих при течении. Исходя из уравнений переноса внутренней энергии (2.11) (или (2.13)) и используя термодинамические соотношения Гиббса (0.5b, 0.5c), легко получить по определению [1] «общее уравнение переноса тепла»

$$\rho T\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\vec{u}\nabla S\right) = \nabla\left(\frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}}\nabla T\right)+\eta\Phi . \qquad (2.23a)$$

В случае совершенного газа и $c_v, c_p = const$ общее уравнение переноса тепла (2.23) можно записать в нужном для нас виде

$$\rho\frac{\partial S}{\partial t} = -\rho\vec{u}\nabla S+\frac{1}{E}\nabla\left(\frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}}\nabla E\right)+\frac{\eta c_v}{E}\Phi . \qquad (2.24)$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части уравнения (2.24). Если применить к нему формулу векторного анализа, записанную чуть ниже уравнения переноса (2.11), то имеем

$$\frac{1}{E}\nabla\left(\frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}}\nabla E\right) = \nabla\left(\frac{1}{E}\frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}}\nabla E\right)+\frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}}\frac{(\nabla E)^2}{E^2} . \qquad (2.25)$$

Здесь

$$(\nabla E)^2 = \nabla E\cdot\nabla E = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial E}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial E}{\partial x_3}\right)^2 .$$

Рассмотрим производную $\frac{\partial \rho S}{\partial t}$ с использованием уравнения непрерывности и (2.24), (2.25)

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} = S\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial S}{\partial t} = -S\nabla(\rho\vec{u})-(\rho\vec{u})\nabla S+$$

$$+\nabla\left(\frac{1}{E}\frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}}\nabla E\right)+\frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}}\frac{(\nabla E)^2}{E^2}+\frac{\eta c_v}{E}\Phi,$$

откуда следует искомое уравнение переноса энтропии

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t}+\nabla(\rho S\vec{u}) = \nabla\left(\frac{1}{E}\frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}}\nabla E\right)+\frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}}\frac{(\nabla E)^2}{E^2}+\frac{\eta c_v}{E}\Phi . \qquad (2.26)$$

Таким образом, авторами разработана полная математическая модель течения сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа, для которого предстоит разработать алгоритм расчета и реализовать его на ЭВМ. В результате авторы планируют провести количественный анализ сложных физических процессов, заложенных в модели.

Библиографические ссылки

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М., 1988.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., 1977.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды Т. I. М., 1970.
4. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы: пер. с английского. М., 1974.
5. *Meixner J.* Ann. Phys (5), 39, 333 (1941); Zs. Phys. Chem. Abt. B, 53, 235 (1943).
6. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., 1969.
7. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер* Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. Т. I. М., 1969.
8. *Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А.* Курс теоретической физики Т. II. М., 1971.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М., 1964.