ВЕСТНИК ТОГУ. 2006. № 1 (2)

УДК 338:001.891.573

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ГОРИЗОНТА ПЛАНИРОВАНИЯ

Булгаков В. К. – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»;
Стригунов В. В. – аспирант кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ТОГУ)

Исследована математическая модель региональной макроэкономики, основанная на производственной B-функции. Дается синтез оптимального управления региональным производственным процессом. Разработан новый экономичный алгоритм решения краевой задачи расчета оптимального управления и соответствующих ему оптимальных траекторий.

The mathematical model of regional macroeconomics, based on industrial B-function is researched. The synthesis of optimum control of regional production is given. The new economic algorithm of solving a boundary value problem of estimating optimum control and optimal paths, appropriate to it is developed.

1. Синтез оптимального управления

Рассмотрим математическую модель макроэкономики региона, предложенную в работах [1, 2]:

$$\frac{dx}{dt} = a\,B(x) - \lambda\,x\,, \tag{1}$$

$$x(0) = x_1 = B\frac{\mu K(0)}{g(0)N(0)}\,, \qquad x_1 \in (0,\,\infty) \tag{2}$$

$$i = c_i\,C_\infty\,B(x)\,, \qquad w = c_w\,C_\infty\,B(x)\,, \qquad y = C_\infty\,B(x) \tag{3}$$

$$B(x) = b\left(1 - e^{-x}\right) + \left(1 - b\right)x\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) \tag{4}$$

с переменным во времени потреблением $w(t)$. Примем функцию $w(t)$ в качестве функции управления (управляющего "параметра") в задаче оптимального управления региональной макроэкономикой организаторами производственного процесса.

Область допустимых значений функции управления можно представить как замкнутое множество

$$\overline{W} = \{\, w(t):\ w_1 \le w \le w_2 \,\}, \tag{5}$$

где

$$w_1(t) = \pi_1\, B(x(t)), \qquad w_2(t) = \pi_2\, B(x(t)), \tag{6}$$
$$\pi_1 = c_{w1}\, C_\infty, \qquad \pi_2 = c_{w2}\, C_\infty.$$

Будем считать, что $\overline{W} \in C[0, T]$, где T – горизонт планирования.

В качестве функции полезности возьмем степенную зависимость $u(w) = w^\alpha$, где $\alpha \in (0, 1)$ – эмпирическая постоянная.

При решении задачи оптимального управления для конечного горизонта планирования в качестве функционала цели возьмем функционал [1]

$$J(w) = \int_0^T w^\alpha(t)\, dt. \tag{7}$$

Уравнение (1) для фазовой переменной, определяющей траекторию развития экономической системы, можно представить в форме

$$\frac{dx}{dt} = a B(x) - \lambda x - p w, \tag{8}$$

здесь $a = q\,\mu C_\infty B$, $\lambda = \mu + \nu + \tau + \chi$, $p = \mu B$. Рассмотрим задачу об отыскании оптимального управления $w^*(t) \in \overline{W}$ макроэкономической системой региона в следующем смысле:

найти управление $w(t) \in \overline{W}$, которое переводит систему (8) из одного фиксированного состояния $x(0) = x_1$ в другое фиксированное состояние $x(T) = x_2$ при условии, что интеграл (7) принимает максимальное значение.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{w \in \overline{W}} \displaystyle\int_0^T w^\alpha(t)\, dt \\ \dfrac{dx}{dt} = a B(x) - \lambda x - p w \qquad x(0) = x_1 \qquad x(T) = x_2 \\ B(x) = b\left(1 - e^{-x}\right) + (1 - b)\, x \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) \end{array}\right\}. \tag{9}$$

Отметим, что в задаче (9) момент времени T заранее не задан.

Введем функцию Гамильтона исследуемой задачи

$$H(x, \psi, w) = w^\alpha + \psi\left[a B(x) - \lambda x - p w\right], \tag{10}$$

гамильтонову систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = a B(x) - \lambda x - p w \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\left[a B'(x) - \lambda\right]\psi \end{array}\right\}, \tag{11}$$

где $\psi(t)$ – сопряженная к $x(t)$ переменная.

Решение задачи (9) получим на основе принципа максимума Понтрягина [5 – 7], "основным содержанием которого" – Л. С. Понтрягин – является следующий факт. Если $w^*(t)$ – оптимальное управление рассматриваемой задачи (9), а $x^*(t)$, $\psi(t)$ – соответствующие ему траектории системы (11), то функция Гамильтона (10) удовлетворяет равенству

$$H\left(x^*(t), \psi(t), w^*(t)\right) = \sup_{w \in \overline{W}} H\left(x^*(t), \psi(t), w\right). \qquad (11')$$

Прежде всего, осуществим синтез оптимального управления рассматриваемой задачи. Введем постоянные $c_i = \dfrac{\alpha}{p(\pi_i)^{1-\alpha}}$ $(i = 1, 2)$,

$\pi = \left(\dfrac{\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ и функции: $\psi_1(x) = \dfrac{c_2}{B^{1-\alpha}(x)}$, $\psi_2(x) = \dfrac{c_1}{B^{1-\alpha}(x)}$.

Теорема 1. Пусть $w^*(t) \in \overline{W}$ – оптимальное управление задачи (9), $x^*(t)$, $\psi(t)$ – соответствующие ему решения гамильтоновой системы (11). Тогда между оптимальным управлением $w^*(t)$, соответствующими ему оптимальными траекториями фазовой и сопряженной переменных $x^*(t)$, $\psi(t)$ имеет место зависимость

$$w^*(t) = \begin{cases} \pi_2 B\left(x^*(t)\right) & \text{при} \quad \psi(t) \le \psi_1\left(x^*(t)\right) \\ \pi \psi^{-\frac{1}{1-\alpha}}(t) & \text{при} \quad \psi_1\left(x^*(t)\right) < \psi(t) < \psi_2\left(x^*(t)\right) \\ \pi_1 B\left(x^*(t)\right) & \text{при} \quad \psi(t) \ge \psi_2\left(x^*(t)\right) \end{cases} . \qquad (12)$$

Доказательство. Пусть областью возможных значений фазовой и сопряженной переменных $x(t)$, $\psi(t)$ гамильтоновой системы (11) задачи (9) является промежуток $(0, \infty)$.

Рассмотрим внутренность множества $\overline{W}$ – открытое множество W функций $w(t) \in C[0, T]$. Известно [7], что когда область управления является открытым множеством, рассматриваемая оптимальная задача эквивалентна задаче Лагранжа классического вариационного исчисления. Точка максимума $w^* \in W$ является стационарной точкой функции Гамильтона (10): $\left.\dfrac{\partial H}{\partial w}\right|_{w^*} = 0$, откуда получаем

$$\psi = p^{-1} \alpha w^{*\alpha-1}. \qquad (13)$$

В соотношении (13) управление $w^* \in W$, сопряженная переменная $\psi \in \Psi$, где $\Psi = \{\psi(t) : \psi_1 < \psi < \psi_2\}$, $\psi_1(t) = p^{-1}\alpha w_2^{\alpha-1} = \dfrac{c_2}{B^{1-\alpha}(x(t))}$;

$\psi_2(t) = p^{-1}\alpha w_1^{\alpha-1} = \dfrac{c_1}{B^{1-\alpha}(x(t))}$. Заметим, что так как $\alpha < 1$, то

$\left.\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}\right|_{w^*} < 0$. Таким образом, при любых фиксированных $x(t) \in (0, \infty)$

$\psi(t) \in \Psi$ функция $w(t) = \pi\left[\psi(t)\right]^{-\frac{1}{1-\alpha}}$ доставляет максимум функци Гамильтона (10) на множестве $w(t) \in W$.

Рассмотрим теперь множество $\Psi_1 = \{\psi(t) : 0 < \psi(t) \le \psi_1(t)\}$ $\Psi_1 \subset C^1$. Пусть ψ произвольная точка множества Ψ_1, т.е. $\psi = \psi_1 - a_1$ где $0 \le a_1(t) < \psi_1(t)$, $a_1(t) \in C^1$. Функция Гамильтона (10) в рассматри ваемой точке $\psi \in \Psi_1$ равна

$$H(x, \psi, w) = w^{\alpha} - p\psi w + \psi\left[a B(x) - \lambda x\right] =$$
$$= w^{\alpha} - p\psi_1 w + p a_1 w + \psi\left[a B(x) - \lambda x\right] = \omega_1(w) + \varphi_1(w) + \psi\left[a B(x) - \lambda x\right]$$

где $\omega_1(w) = w^{\alpha}\left[1 - \alpha\left(\frac{w}{w_2}\right)^{1-\alpha}\right]$, $\varphi_1(w) = p a_1 w$.

Анализ функции $\omega_1(w)$ (производных ω_{1w}, ω_{1ww}) показывает, чт $\omega_1(w)$ имеет максимум при $w = w_2$, функция $\varphi_1(w) = 0$ при $a_1(t) = ($ или имеет максимум в точке $w = w_2$, если $a_1(t) > 0$.

Таким образом, при любых фиксированных $x(t) \in (0, \infty)$, $\psi(t) \in \Psi$ функция $w_2(t) = \pi_2 B(x(t))$ доставляет максимум $H(x, \psi, w)$ на мнс жестве $w(t) \in \overline{W}$.

Аналогично, рассмотрев $H(x, \psi, w)$ в произвольной точке $\psi \in \Psi_2$ где $\Psi_2 = \{\psi(t) : \psi_2(t) \le \psi(t) < \infty\}$, $\Psi_2 \subset C^1$, т.е. при $\psi = \psi_2 + a_2$, гд $0 \le a_2(t) < \infty$, $a_2(t) \in C^1$,

$$H(x, \psi, w) = w^{\alpha} - p\psi_2 w - p a_2 w + \psi\left[a B(x) - \lambda x\right] =$$
$$= \omega_2(w) + \varphi_2(w) + \psi\left[a B(x) - \lambda x\right],$$

где $\omega_2(w) = w^{\alpha}\left[1 - \alpha\left(\frac{w}{w_1}\right)^{1-\alpha}\right]$, $\varphi_2(w) = -p a_2 w$, проведя анализ фунı ций $\omega_2(w)$, $\varphi_2(w)$, можно убедиться, что при любых фиксированны $x(t) \in (0, \infty)$, $\psi(t) \in \Psi_2$ функция $w_1(t) = \pi_1 B(x(t))$ доставляет макси мум функции Гамильтона $H(x, \psi, w)$ на множестве $w(t) \in \overline{W}$. Так ка $\Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2 = (0, \infty)$, то рассмотрена вся область возможных значени сопряженной переменной $\psi(t)$ и фазовой переменной $x(t)$ и показан что максимум функции Гамильтона (10) имеет место при любых фиı сированных функциях $\psi(t) \in (0, \infty)$, $x(t) \in (0, \infty)$ на управлениях

$$\left.\begin{array}{lll} w(t)=\pi_2\,B(x(t)), & \text{если} & \psi(t)\in\Psi_1 \\ w(t)=\pi\left[\psi(t)\right]^{-\frac{1}{1-\alpha}}, & \text{если} & \psi(t)\in\Psi \\ w(t)=\pi_1\,B(x(t)), & \text{если} & \psi(t)\in\Psi_2 \end{array}\right\}. \qquad (14$$

Пусть $w^*(t)$ – оптимальное управление задачи (9), а $x^*(t)$, $\psi(t)$ - соответствующее ему решение Гамильтоновой системы (11). Тогда со гласно основному равенству принципа максимума Понтрягина (11' соотношения (14) можно записать в виде (12). Теорема доказана.

Замечание. Непосредственной проверкой можно убедиться, чт функция $w(\psi)=\pi\left[\psi\right]^{-\frac{1}{1-\alpha}}$ имеет пределы $\lim\limits_{\psi\to\psi_1-} w(\psi)=w_2$ $\lim\limits_{\psi\to\psi_2+} w(\psi)=w_1$, т.е. оптимальное управление $w^*(t)$ – непрерывная функ ция в точках ψ_1, ψ_2 и, следовательно, на всем промежутке $(0,\infty)$.

2. Решение краевой задачи оптимального управления

Пусть $w(t)$ – оптимальное управление динамикой региональной макроэкономики, определяемое зависимостями (12) теоремы 1, а $x(t)$ $\psi(t)$ – соответствующие ему решения системы (звездочки у w и x дл простоты опустим):

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt}=a\,B(x)-\lambda\,x-p\,w & 0\le t\le T \\ \dfrac{d\psi}{dt}=-\left[a\,B'(x)-\lambda\right]\psi & \\ x(0)=x_1, \qquad x(T)=x_2 & \end{array}\right\}. \qquad (15$$

Введем следующие параметры модели: $a=q\,\mu\,B\,C_\infty$ $a_1=(q-c_{w2})\mu\,B\,C_\infty$, $a_2=(q-c_{w1})\mu\,B\,C_\infty$, $\eta=\dfrac{1}{a}$, $\eta_1=\dfrac{a_1}{a}$, $\eta_2=\dfrac{a_2}{a}$ $\gamma=\dfrac{\lambda}{a}$, $\gamma_1=\dfrac{\lambda}{a_1}$, $\gamma_2=\dfrac{\lambda}{a_2}$, $\lambda=\mu+\nu+\tau+\chi$, $p=\mu B$, $\sigma=\dfrac{1}{a}\left[\dfrac{\alpha}{p^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ $c_q=\dfrac{\alpha}{p\left[q\,C_\infty\right]^{1-\alpha}}$.

Тогда уравнения, определяющие оптимальные траектории $x(t)$ $\psi(t)$ задачи (9), можно записать в следующей форме:

$0\le t\le T$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,\psi) \\ \frac{d\psi}{dt} &= G(x,\psi) \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Здесь

$$F(x,\psi)=\begin{cases} a_1\left(B(x)-\gamma_1 x\right) & \text{при} \quad \psi(t)\le\psi_1(t), \\ a\left(B(x)-\gamma x-\sigma\psi^{-\frac{1}{1-\alpha}}\right) & \text{при} \quad \psi_1(t)<\psi(t)<\psi_2(t) \\ a_2\left(B(x)-\gamma_2 x\right) & \text{при} \quad \psi(t)\ge\psi_2(t), \end{cases},$$

$G(x,\psi)=a\left(\gamma-B'(x)\right)\psi$.

Нам понадобится также следующая, эквивалентная системе (16), система уравнений, в которой в качестве независимой переменной взята сопряженная переменная ψ, а в качестве функций – фазовая переменная x и время t

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\psi} &= \varphi(x,\psi) \\ \frac{dt}{d\psi} &= \chi(x,\psi) \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Здесь

$$\varphi(x,\psi)=\begin{cases} \eta_1\dfrac{B(x)-\gamma_1 x}{\gamma-B'(x)}\dfrac{1}{\psi} & \text{при} \quad \psi\le\psi_1(x), \\ \dfrac{B(x)-\gamma x-\sigma\psi^{-\frac{1}{1-\alpha}}}{\gamma-B'(x)}\dfrac{1}{\psi} & \text{при} \quad \psi_1(x)<\psi<\psi_2(x) \\ \eta_2\dfrac{B(x)-\gamma_2 x}{\gamma-B'(x)}\dfrac{1}{\psi} & \text{при} \quad \psi\ge\psi_2(x), \end{cases},$$

$$\chi(x,\psi)=\frac{\eta}{\gamma-B'(x)}\frac{1}{\psi}.$$

Рассмотрим на положительном ортанте $R_+(\psi,x)$ сопряженной и фазовой переменной замкнутую область $\Omega(\psi,x)=\{\psi,x:\ \psi_{\min}\le\psi\le\psi_{\max},\ x_{\min}\le x\le x_{\max}\}$, где отрезок $[x_{\min},x_{\max}]$ содержит в себе все возможные реальные состояния x_1, x_2 региональных экономических систем, а $\psi_{\min}=\psi(x_{\max})$, $\psi_{\max}=\psi(x_{\min})$ – соответствующие значения сопряженной переменной. Область Ω (рис. 1) назовем областью реальных состояний и реальных процессов региональных экономических систем при конечном горизонте планирования ($T<\infty$).

Рассмотрим в области Ω кривые

$$\psi_1(x) = \frac{c_2}{B^{1-\alpha}(x)}, \qquad \psi_2(x) = \frac{c_1}{B^{1-\alpha}(x)} . \qquad (18)$$

Так как B-функция имеет асимптоту $B(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$, то $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ имеют асимптоты $\psi_1(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} c_2$, $\psi_2(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} c_1$. Для экономической системы с исходными данными, приведенными ранее, $c_1 = 10.30$, $c_2 = 5.78$. Кривые $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ делят область на три подобласти, рассмотренные в теореме 1. Для простоты изложения эти подобласти будем обозначать теми же символами Ψ_1, Ψ, Ψ_2. В подобласти Ψ есть особая точка (ψ_s, x_s), координаты которой определяются алгебраическими уравнениями

$$\gamma - B'(x_s) = 0, \qquad \psi_s = \frac{c_q}{[B(x_s) - \gamma x_s]^{1-\alpha}} .$$

Для рассматриваемого примера экономической системы $\psi_s = 7.0798$, $x_s = 1.6492$.

Введем в подобласти Ψ кривую $\psi_0(x)$, на которой производная $\frac{dx}{d\psi} = 0$ (точка (ψ_s, x_s) пока не рассматривается). Кривая $\psi_0(x)$ определяется уравнением

$$\psi_0(x) = \frac{c_q}{[B(x) - \gamma x]^{1-\alpha}} . \qquad (19)$$

Из первого уравнения системы (16) видно, что на кривой $\psi_0(x)$ $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\psi_0} = 0$, поэтому $\psi_0(x)$ – есть линия стационарных состояний экономической системы. Линия $\psi_0(x)$ сыграет ключевую роль в построении алгоритма решения задачи (9). На рис. 1 нанесена линия $\psi_0(x)$ для рассматриваемой в качестве примера экономической системы Хабаровского края.

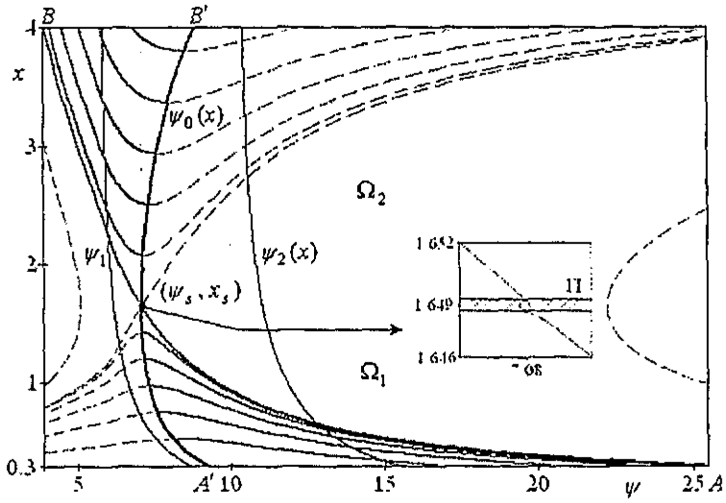

Рис. 1

Введем окружность с центром в точке (ψ_s, x_s) с малым радиусом h, обозначив ее O_{sh} (в наших расчетах $h = 10^{-6}$). Для простоты изло жения будем считать, что точка A имеет такую координату $\psi_{\max}$, чт интегральная кривая первого уравнения системы (17), исходящая и точки A (кривая a_1), касается снизу окружности O_{sh}; а точка B имее такую координату $\psi_{\min}$, что интегральная кривая, исходящая из точк B (кривая b_1), касается O_{sh} сверху.

В силу важности знания поведения интегральных кривых в облас ти Ω для построения алгоритма решения задачи оптимального управ ления (9) на рис. 1 показаны интегральные кривые $\{a_i\}$, исходящие и промежутка $A'A = \{\psi_0(x_{\min}) < \psi \le \psi_{\max}, x = x_{\min}\}$, и кривые $\{b_i\}$, исхо дящие из промежутка $BB' = \{\psi_{\min} \le \psi < \psi_0(x_{\max}), x = x_{\max}\}$, посчитан ные на ЭВМ для рассматриваемого примера экономической систем решением системы (16), эквивалентной системе (17) для начальны данных x_1, ψ_1 из $A'A$, BB' методом Рунге-Кутта четвертого порядк точности [4] (серия расчетов).

Рассмотрим области Ω_1, $\Omega_2 \subset \Omega$, разделенные горизонтально полосой П шириной $2h$; границы полосы касаются круга O_{sh} (рис. 1)

Лемма 1. Интегральные кривые системы (17), исходящие из пр межутков $A'A$, BB', образуют два семейства $\{a_{i_1}\}$, $\{b_{i_2}\}$; $\{a_{i_1}\}$, рас положенных в Ω_1, $\{b_{i_2}\}$ – в Ω_2. Ни одна кривая семейств $\{a_{i_1}\}$ $\{b_{i_2}\}$ не пересекает полосу П. Здесь $i_1 = \overline{1, n_1}$, $i_2 = \overline{1, n_2}$, n_1, n_2 – лю бые целые числа.

Справедливость леммы следует из рис. 1.

Обозначим через Ω_1^+ часть области Ω_1, ограниченную интегральной кривой a_1 (проходящей через точку A), кривой $\psi_0(x)$ и отрезком $A'A$, а через Ω_2^- – часть области Ω_2, ограниченную интегральной кривой b_1 (проходящей через точку B), кривой $\psi_0(x)$ и отрезком BB' (рис. 2). Обозначим часть кривой $\psi_0(x)$, лежащей в области Ω_1^+, через $\psi_0^+(x)$, а в области Ω_2^- – через $\psi_0^-(x)$. Обозначим интегральные кривые $\{a_{i_1}\}$, лежащие в Ω_1^+ через $\{a_{i_1}^+\}$, а интегральные кривые $\{b_{i_2}\}$, лежащие в Ω_2^- через $\{b_{i_2}^-\}$.

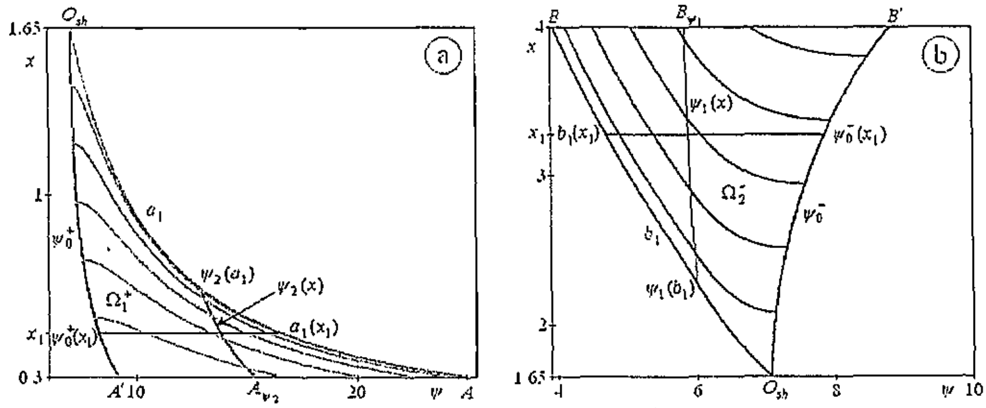

Рис. 2

Лемма 2. Интегральные кривые $\{a_{i_1}^+\} \subset \Omega_1^+$ не пересекаются между собой, интегральные кривые $\{b_{i_2}^-\} \subset \Omega_2^-$ также не пересекаются между собой. Каждой точке ξ_{i_1} промежутка $A'A$ кривые $\{a_{i_1}^+\}$ ставят в соответствие только одну точку кривой $\psi_0^+(x)$. Каждой точке ξ_{i_2} промежутка BB' кривые $\{b_{i_2}^-\}$ ставят в соответствие только одну точку кривой $\psi_0^-(x)$.

Доказательство леммы 2 основано на анализе задачи Коши для интегральных кривых на рис. 2 и изложено в работе авторов [3].

Замечание. Как нетрудно заметить, основное содержание доказательства леммы 2 заключается в установлении утверждения: пусть правая часть $\varphi(\psi, x)$ задачи Коши

$$\frac{dx}{d\psi} = \varphi(\psi, x), \qquad x(\psi_0) = x_0, \qquad \psi,\ x \in \Omega \cup \partial\Omega,$$

ψ_0, $x_0 \in \partial\Omega$, ограниченная непрерывная функция переменных ψ, x

имеет в $\overline{\Omega}$ ограниченные непрерывные производные $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ кроме ко нечного числа начинающихся и заканчивающихся на $\partial\Omega$ непересе кающихся линий $\psi_i(x)$, $i=1,n$, на которых $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ терпит разрыв перво го рода, тогда классическое решение задачи Коши, пересекающее ли нии $\psi_i(x)$, существует и единственно. В нашем случае $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ терпит раз рыв первого рода на кривых $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$.

Пусть x_1, x_2 – точки начального и конечного состояния экономи ческой системы. Возможны два случая. Случай А: $x_{\min} < x_1 < x_2 < x$ (рис. 3, *a*). В этом случае согласно леммам 1, 2, через сечения x_1, x_2 плоскости (x,ψ) проходят интегральные кривые (экстремали $\{a_i\} \in \Omega_1^+$, $i=\overline{1,n_1}$ (n_1 – любое целое число). Экстремаль a_1 касаетс круга O_{sh}, а экстремаль a_{n_1} в сечении $x=x_2$ имеет общую точку кривой $\psi_0(x)$. Очевидно, что все экстремали семейства $\{a_i\}$, прохо дящие через сечения $x=x_1$ и $x=x_2$, находятся между экстремалями a_1, a_{n_1}.

В случае В: $x_s < x_2 < x_1 < x_{\max}$ (рис. 3, *b*) через сечения x_1, x_2 плос кости (x,ψ) проходят интегральные кривые (экстремали) $\{b_i\} \in \Omega_2^-$ $i=\overline{1,n_2}$ (n_2 – любое целое число). Экстремаль b_1 касается круга O_{sh} b_{n_2} – в сечении $x=x_2$ имеет общую точку с кривой $\psi_0(x)$. Отмети также, что все экстремали, проходящие через сечения $x=x_1$ и $x=x_2$ находятся между экстремалями b_1, b_{n_2}. Значения x_1, x_2 случая А случая В совершенно разные.

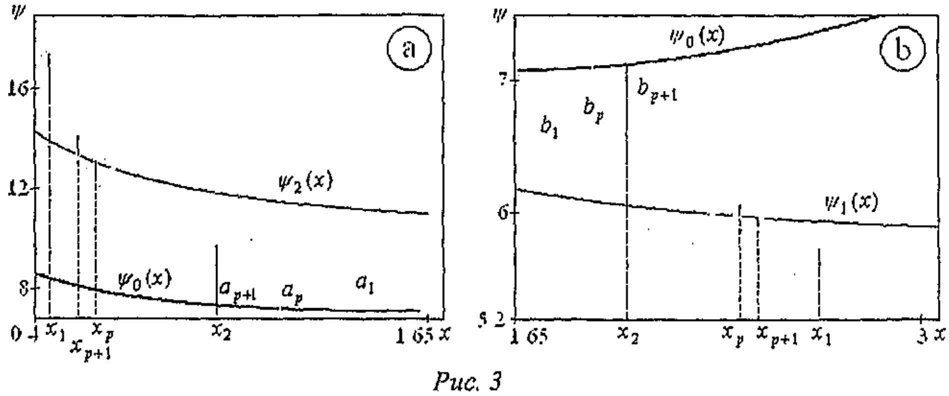

Рис. 3

Пусть J'_1, ..., J'_{n_1} – значения интеграла благосостояния на экстремалях a_1, ..., a_{n_1}, а T'_1, ..., T'_{n_1} – времена перехода из состояния x_1 в состояние x_2 по экстремалям a_1, ..., a_{n_1}. Обозначим через J''_1, ..., J''_{n_2} и T''_1, ..., T''_{n_2} – интегралы благосостояния, времена перехода на экстремалях b_1, ..., b_{n_2}.

Теорема 2. Рассмотрим экономический процесс, описываемый системой уравнений (17).

Рассмотрим x_1, $x_2 \in \Omega_1^+$ – начальное и конечное состояния экономической системы, $x_{\min} < x_1 < x_2 < x_s$ (случай А).

Рассмотрим также x_1, $x_2 \in \Omega_2^-$ – начальное и конечное состояния системы, $x_s < x_2 < x_1 < x_{\max}$ (случай В). Тогда: 1) Время перехода из состояния x_1 в состояние x_2, x_1, $x_2 \in \Omega_1^+$, по экстремалям a_1, ..., a_{n_1} и соответствующие значения интеграла благосостояния удовлетворяют неравенствам

$$T'_1 < T'_2 < ... < T'_n \, , \tag{20}$$

$$J'_1 < J'_2 < ... < J'_n \, . \tag{20'}$$

2) Время перехода из состояния x_1 в состояние x_2, x_1, $x_2 \in \Omega_2^-$, по экстремалям b_1, ..., b_{n_2} и соответствующие значения интеграла благосостояния удовлетворяют неравенствам

$$T''_1 < T''_2 < ... < T''_n \, , \tag{21}$$

$$J''_1 < J''_2 < ... < J''_n \, . \tag{21'}$$

Доказательство изложено в работе авторов [3].

Экономический процесс проистекает во времени из состояния (ψ_1, x_1) в состояние (ψ_2, x_2). Задача, определяющая изменение времени, есть

$$\frac{dt}{d\psi} = \frac{\eta}{\gamma - B'(x)} \frac{1}{\psi} \, , \qquad t(\psi_1) = 0 \, .$$

В случае $x_1 < x_2 < x_s$ правая часть < 0 и $d\psi < 0$, поэтому время изменяется от $t = 0$ до $t = T$. Аналогично при $x_1 > x_2 > x_s$ время также изменяется от 0 до T. В результате анализа различных подходов к решению краевой задачи оптимального управления оказалось, что задача довольно просто решается, если рассмотреть процесс от состояния (ψ_2, x_2) к состоянию (ψ_1, x_1), т.е. за “начальный момент” времени взять горизонт планирования, точку (ψ_2, x_2), а за конечный – точку (ψ_1, x_1). Переменную времени этого процесса обозначим через θ. Состояние системы (ψ_2, x_2) соответствует $\theta = 0$, а физически истинное начальное состояние (ψ_1, x_1) становится прошлым, соответствующ времени $\theta = -T$. Поскольку $\theta = t - T$, то задача для θ имеет вид

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\eta}{\gamma - B'(x)} \frac{1}{\psi}, \qquad \theta(\psi_2) = 0.$$

Определение. Решение задачи оптимального управления полност определяется табл. 1.

Таблиц

x^*	x_2^*	…	x_1^*
ψ	ψ_2	…	ψ_1
θ	0	…	$-T$
w^*	w_2^*	…	w_1^*
t	T	…	0

Так как действительно, табл. 1 определяет оптимальное управлен $w^* = w^*(t)$, $t \in [0, T]$, соответствующие ему оптимальные траектор $x^*(t)$, $\psi(t)$, $t \in [0, T]$ и интеграл благосостояния $J(w^*) = \int_0^T w^*(t)\,dt$.

Теорема 3. Рассмотрим экономический процесс, описываемый с темой уравнений (17). Пусть x_1, x_2 – точки начального и конечн состояния системы; x_1, $x_2 \in \Omega$. Тогда решение задачи оптимальн управления (табл. 1) определяется задачей Коши:

А) при $x_{min} \le x_1 < x_2 < x_s$

$$x^*(\psi) \le x_2, \qquad \theta(\psi) \le 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx^*}{d\psi} = \begin{cases} \eta_2 \dfrac{B(x^*) - \gamma_2 x^*}{\gamma - B'(x^*)} \dfrac{1}{\psi} & \text{при} \quad \psi_2(x^*) \le \psi \\[2ex] \dfrac{B(x^*) - \gamma x^* - \sigma \psi^{-\frac{1}{1-\alpha}}}{\gamma - B'(x^*)} \dfrac{1}{\psi} & \text{при} \quad \psi_0(x_2) \le \psi < \psi_2(x^*) \end{cases} \\[2ex] \dfrac{d\theta}{d\psi} = \dfrac{\eta}{\gamma - B'(x^*)} \dfrac{1}{\psi} \end{array}\right\} \quad (\text{…}$$

с начальными условиями

$$\psi_2 = \psi_0(x_2) = \frac{c_q}{\left[B(x_2) - \gamma x_2\right]^{1-\alpha}}, \quad x(\psi_2) = x_2, \quad \theta(\psi_2) = 0. \qquad (\text{…}$$

В) при $x_s < x_2 < x_1 \le x_{max}$ – задачей Коши:

$$x^*(\psi) \ge x_2, \qquad \theta(\psi) \le 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^*}{d\psi} &= \begin{cases} \eta_1 \dfrac{B(x^*)-\gamma_1 x^*}{\gamma - B'(x^*)} \dfrac{1}{\psi} & \text{при} \quad \psi_1(x^*) \ge \psi \\ \dfrac{B(x^*)-\gamma x^* - \sigma \psi^{-\frac{1}{1-\alpha}}}{\gamma - B'(x^*)} \dfrac{1}{\psi} & \text{при} \quad \psi_0(x_2) \ge \psi > \psi_1(x^*) \end{cases} \\ \frac{d\theta}{d\psi} &= \frac{\eta}{\gamma - B'(x^*)} \frac{1}{\psi} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

с начальными условиями (23).

Доказательство. Рассмотрим случай А. Пусть $x_1 < x_2$, $x_2 < x_s$. Тогда согласно лемме 1, оптимальная траектория находится среди интегральных кривых семейства $\{a_{i_1}\} \subset \Omega_1$ (рис. 2, *а*). Если $x_1 > x_{\min}$, то по заданному начальному состоянию x_1 строим в области Ω_1^+ промежуток $\left(\varphi_0^+(x_1), a_1(x_1)\right]$, который параллелен AA' (рис. 2, *а*). Область $\Omega_1^+(x_1) \subset \Omega_1^+$, интегральные кривые $\{a_{i_1}\} \subset \Omega_1^+(x_1)$ удовлетворяют условиям леммы 2, согласно которой для любого x_1, $x_1 < x_2$ существует и притом единственная интегральная кривая $a \in \{a_{i_1}\}$, соединяющая точки x_1 и x_2, $x_2 \in \psi_0^+(x)$. Это есть интегральная кривая a_{n_1}. Согласно теореме 2 интеграл благосостояния будет наибольшим на экстремали a_{n_1}, содержащей точку (ψ_2, x_2). Координаты точки $(\psi_2, x_2) \in \psi_0^+(x)$ известны ($\psi_2 = \dfrac{c_q}{\left[B(x_2)-\gamma x_2\right]^{1-\alpha}}$), поэтому решая из точки (ψ_2, x_2) задачу Коши (22), (23), находим первые три строки табл. 1. Так как горизонт планирования T в момент окончания решения задачи Коши становится известным – это значение решения θ со знаком минус второго уравнения системы (22) в момент, когда $x^*(\psi)$ становится равной x_1. Согласно данному выше определению решения задачи оптимального управления, можно сказать, что в момент окончания решения задачи Коши (22), (23) становится известной пятая строка (строка t) табл. 1. Следовательно, первая, вторая и пятая строки табл. 1 определяют траектории $x^* = x^*(t)$, $\psi(t)$. Используя установленные теоремой 1 зависимости (12), вычисляем четвертую строку $w^*(t)$ табл. 1. В классических терминах это можно высказать так: решение задачи Коши (22), (23) определяет зависимости $x^* = \tilde{x}^*(\psi)$, $\theta = f(\psi)$, T, $t = \theta + T$. Функция $f = f(\psi)$ строго монотонно убывающая, следовательно, $\exists f^{-1}$ такая, что $\psi = f^{-1}(\theta)$ или $\psi = \psi(t)$. Тогда имеем $x^* = \tilde{x}(\psi(t))$ или $x^* = x^*(t)$, т. е. решение задачи Коши (22), (23) определяет траектории

$x^* = x^*(t)$, $\psi = \psi(t)$ для $t \in [0, T]$. Используя зависимости (12) теоремы 1, находим оптимальное управление $w^*(t)$ $\forall t$, $t \in [0, T]$.

Во втором случае (В), когда $x_s < x_2 < x_1$, согласно лемме 1 оптимальная траектория находится среди семейства интегральных кривых $\{b_{i_2}\} \subset \Omega_2$ (рис. 2, *b*). Если $x_1 < x_{\max}$, то по заданному начальному состоянию x_1 строим в области Ω_2^- промежуток $\left(b_1(x_1),\ \psi_0^-(x_1)\right]$, который параллелен BB' (рис. 2, *b*). Область $\Omega_2^-(x_1) \subset \Omega_2^-$, интегральные кривые на $\Omega_2^-(x_1)$ удовлетворяют условиям леммы 2 теоремы 2, поэтому, повторяя рассуждения случая А с учетом зависимостей (12) теоремы 1, приходим к выводу, что решение задачи оптимального управления для случая В определяется задачей Коши (24), (23). Теорема доказана.

Замечание. Численное решение задач Коши (22), (23) и (24), (23) на ЭВМ проводится методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности. На каждом шаге процедуры Рунге-Кутта считается также оптимальное управление w^* и слагаемое в интеграле благосостояния. В момент завершения решения задачи Коши формируется строка времени $\{t_n\} = T + \{\theta_{N-n}\}$ $(n = \overline{0, N})$, $(0 \le \{t_n\} \le T)$.

3. Численные исследования

Рассмотрим некоторые результаты расчетов оптимального управления экономикой организаторами производственного процесса.

Параметры зависимости (5), (6), определяющие область допустимых значений функции управления, приняты равными $\pi_1 = 1.6927$, $\pi_2 = 11.6074$.

Вычисления параметров систем дифференциальных уравнений (16), (17) дали значения: $a = 0.6876$, $a_1 = 0.014$, $a_2 = 0.5894$, $\gamma = 0.1825$, $\gamma_1 = 8.9433$, $\gamma_2 = 0.2129$, $\sigma = 339.7269$, $\pi = 4025.5$, $\eta_1 = 0.0204$, $\eta_2 = 0.8571$, $c_1 = 10.3007$, $c_2 = 5.7813$, $c_q = 5.7456$.

Рассмотрим вначале результаты расчетов оптимального управления и соответствующих ему оптимальных траекторий для случая А: $x_1 = 0.2$, 1) $x_2 = 1.649208$, 2) $x_2 = 1.5$, 3) $x_2 = 1.3$, 4) $x_2 = 0.9$, 5) $x_2 = 0.5$.

На рис. 4 в плоскости ψ, x показаны оптимальные траектории $x^* = x^*(\psi)$ между начальным (ψ_1, x_1) и конечным (ψ_2, x_2) состояниями экономической системы, полученные решением задачи (22), (23). Номера кривых соответствуют номерам посчитанных вариантов (1 – 5).

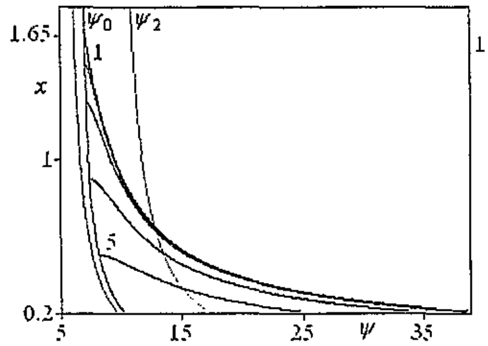

Рис. 4

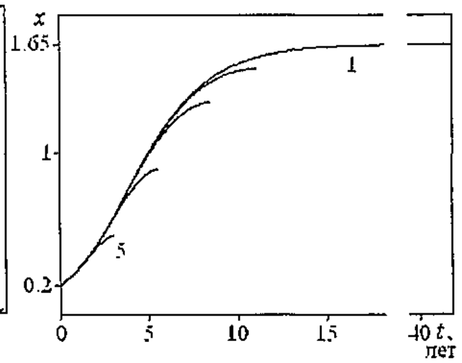

Рис. 5

На рис. 5 показаны оптимальные траектории как функции времени $x^* = x^*(t)$ между начальным и конечным состояниями системы.

На рис. 6 представлены оптимальные управления $w^* = w^*(t)$ для вариантов 1–5 (соответственно кривые 1 – 5).

Рассмотрим теперь результаты расчетов оптимального управления, оптимальных траекторий для случая В: $x_1 = 4$, 1) $x_2 = 1.64921$, 2) $x_2 = 1.7$, 3) $x_2 = 1.8$, 4) $x_2 = 1.9$, 5) $x_2 = 3$.

На рис. 7 в плоскости ψ, x показаны оптимальные траектории $x^* = x^*(\psi)$ для рассмотренных пяти вариантов. На рис. 8 представлены оптимальные траектории $x^*(t)$ как функции времени t.

На рис. 9 показаны найденные оптимальные управления $w^*(t)$ для вариантов 1 – 5.

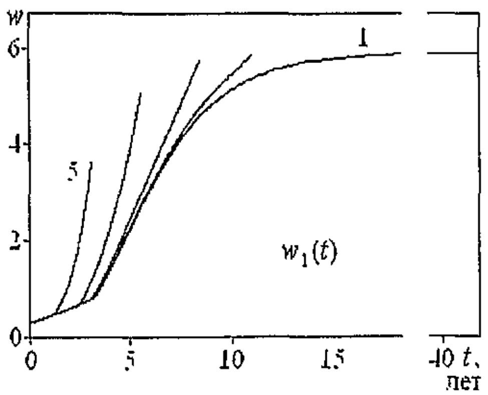

Рис. 6

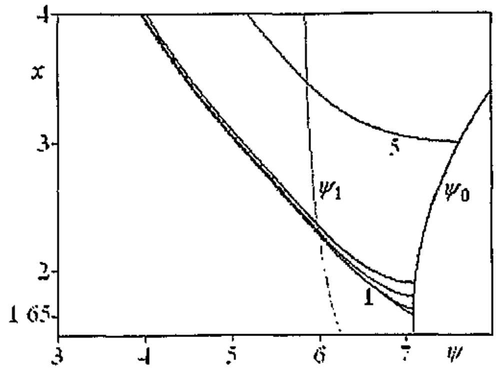

Рис. 7

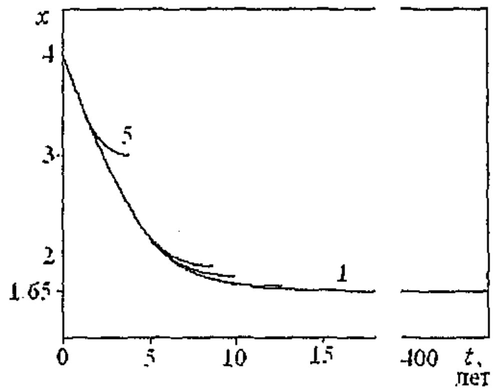

Рис. 8

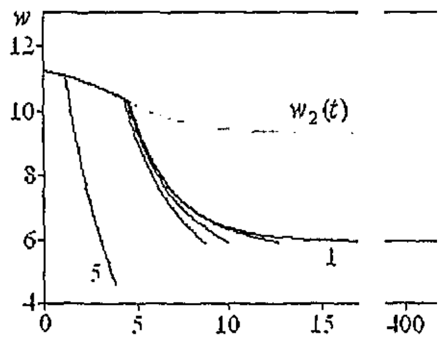

Рис. 9

В результате проведенных исследований предложена новая м тематическая модель региональной макроэкономики на основе прои водственной B-функции, выполнен синтез оптимального управлен экономикой (теорема 1), разработан новый оригинальный алгори решения краевой задачи оптимального управления (теорема 3), про дены численные исследования на ЭВМ оптимального управления оптимальных траекторий конкретных состояний региональной экон мической системы.

Библиографические ссылки

1. *Булгаков В. К., Стригунов В. В.* Модель и исследование макроэко мики региона на основе производственной B-функции // Вестник ТО 2005. № 1.
2. *Булгаков В. К., Булгаков О. В.* Моделирование динамики обобщаю показателей развития региональных экономических систем России // Эко мика и мат. методы. 2006. № 1.
3. *Булгаков В. К., Стригунов В. В.* Исследование одной математическ модели макроэкономики региона РФ, решение задачи оптимального управ ния: Препринт. Хабаровск, 2006.
4. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
5. *Понтрягин Л. С.* Избранные научные труды. М.: Наука, 1988.
6. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В.* К теории оп мальных процессов // Докл. АН СССР. 1959. № 1.
7. *Математическая* теория оптимальных процессов. / Л. С. Понтряги др. М.: Наука, 1976.